

Q
56
S7

59

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME CINQUANTE-NEUVIÈME, 1939

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

PREMIER FASCICULE

31 MARS 1939



Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46 Chèques postaux Paris n° 110002

1939

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé : 15 frs

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
Session du 26 janvier 1939, à Bruxelles.	
PREMIÈRE SECTION : Mathématiques	5
Sur une application des fonctions $\cotg x$ et px , par M. J. Touchard	6
Sur les réseaux R orthogonaux, par M. F. Simonart	9
Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles. Les équations de Mayevski.	
Les divers amortissements, par M. R. d'Adhémar	18
Fonctions associées aux fonctions de Riemann d'un système différentiel linéaire.	
Application à l'intégration d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre (2 ^{de} note), par R. H. T. Germa	36
La géométrie des sous-espaces, par le R. P. Fr. Goreux, S. J.	44
Contribution à l'étude de l'univalence locale des fonctions holomorphes, par M. R. Ballieu	53
DEUXIÈME SECTION : Physique et Chimie.	104
Théorie de l'élasticité du second ordre avec application à la théorie du flambage, par M. M. Biot	104
Calculs des fréquences et modes fondamentaux gauches de vibration des molécules de deutéroéthylène $C_2H_xD_y$ ($x+y=4$), par MM. E. Bernard et C. Manneback.	113
Errata du calcul de la fonction potentielle et les fréquences de $C_2H_xD_y$ par Yong-Li Tchang	125
Correspondance de M. R. Servant et M. A. Biot : Remarques sur la taille des lames de quartz	126

Les ANNALES de la Société scientifique de Bruxelles ont paru depuis 1927 en quatre séries distinctes, plus un fascicule administratif.

Série A. Sciences mathématiques (1^{re} section).

Série B. Sciences physiques et naturelles (2^e et 3^e sections).

Série C. Sciences médicales (4^e section).

Série D. Sciences économiques (5^e section).

Les comptes rendus des assemblées générales se trouvent dans le fascicule administratif, qui paraît après la session de Pâques.

Les ANNALES sont divisées d'une nouvelle manière à partir de 1937 :

Série I. Sciences mathématiques et physiques (1^{re}, 2^e et 6^e sections).

Série II. Sciences naturelles et médicales (3^e et 4^e sections).

Série III. Sciences économiques (5^e section).

Fascicule administratif.

La cotisation annuelle des membres (20 belgas) leur donne droit à l'ensemble de ces publications. Toutefois les membres peuvent renoncer, avant la fin de janvier de chaque année, à une ou deux séries et obtenir une ristourne de dix ou vingt francs sur la cotisation.

Le prix de l'ABONNEMENT aux ANNALES pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique est fixé par le tarif suivant :

	Périodicité	en Belgique	en France	dans les autres pays
Série I	trimestrielle	35 fr.	9 belgas	12 belgas
Série II	"	35 fr.	9 belgas	12 belgas
Série III	"	60 fr.	14 belgas	18 belgas
Toutes les séries		110 fr.	28 belgas	35 belgas

SESSION DU 26 JANVIER 1939

A BRUXELLES

Première Section

Sciences Mathématiques

Présidence de M. F. Simonart.

M. J. Touchard présente une note sur *Une application des fonctions $\cotg x$ et px .*

M. F. Simonart présente une note sur *Les systèmes R orthogonaux.*

M. le V^{te} R. d'Adhémar présente un mémoire intitulé : *Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles. Les équations de Mayevski. Les divers amortissements.*

M. R. Germary présente un travail intitulé : *Fonctions associées aux fonctions de Riemann d'un système différentiel linéaire. — Application à l'intégration d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre (2^{me} note).*

M. R. Ballieu présente une note intitulée : *Contribution à l'étude de l'univalence locale des fonctions holomorphes.*

Le R. P. F. Goreux présente une note sur *La géométrie des sous-espaces.*

Ces travaux paraîtront dans les *Annales*.

SUR UNE APPLICATION DES FONCTIONS $\cotg x$ ET px

Note de M. J. TOUCHARD

§ 1

Soient

$$(1) \quad f(x) = \sum_0^{\infty} \lambda_n x^n, \quad g(x) = \sum_0^{\infty} \mu_n x^n, \quad k(x) = \sum_0^{\infty} k_n x^n,$$

trois fonctions holomorphes dans un cercle de rayon supérieur à 1, décrit de l'origine comme centre, et satisfaisant à la relation :

$$(2) \quad \frac{d^p f(x)}{dx^p} = g(x) f(x) + k(x).$$

Les intégrales

$$\int_0^1 x^{a-1} f(x) dx, \quad \int_0^1 x^{a-1} g(x) dx, \quad \int_0^1 x^{a-1} k(x) dx,$$

ont un sens pour $\Re(a) > 0$ et sont prolongées dans tout le plan par les séries

$$(3) \quad F(a) = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda_n}{a+n}, \quad G(a) = \sum_0^{\infty} \frac{\mu_n}{a+n}, \quad K(a) = \sum_0^{\infty} \frac{k_n}{a+n};$$

de plus, quand a s'éloigne à l'infini sur un contour quelconque, ne s'approchant pas indéfiniment des pôles $-n$, les produits $aF(a)$, $aG(a)$, $aK(a)$, tendent vers les limites respectives $f(1)$, $g(1)$ et $k(1)$.

Intégrons p fois, par parties, l'intégrale qui représente $F(a)$, en supposant $\Re(a) > 0$; il vient

$$(4) \quad F(a) = R_p(a) + \frac{(-1)^p}{a(a+1) \dots (a+p-1)} \int_0^1 x^{a+p-1} f^{(p)}(x) dx,$$

où $R_p(a)$ désigne la fraction rationnelle, d'ordre p ,

$$(5) \quad R_p(a) = \frac{f(1)}{a} - \frac{f'(1)}{a(a+1)} + \dots + \frac{(-1)^{p-1}}{a(a+1) \dots (a+p-1)} f^{(p-1)}(1).$$

Servons-nous ensuite de la relation (2) et nous aurons

$$(6) \quad \int_0^1 x^{a+p-1} f^{(p)}(x) dx = \int_0^1 x^{a+p-1} k(x) dx + \int_0^1 x^{a+p-1} g(x) f(x) dx = \\ = K(a+p) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \mu_n + \lambda_1 \mu_{n-1} + \dots + \lambda_n \mu_0}{a+p+n}.$$

Or, cette dernière série peut s'écrire

$$(7) \quad \mu_0 F(a+p) + \mu_1 F(a+p+1) + \mu_2 F(a+p+2) + \dots$$

et, si on substitue cette expression dans (6), puis le résultat dans (4), on obtient une équation fonctionnelle à laquelle satisfait la fonction $F(a)$. A cette équation fonctionnelle on peut donner une forme plus simple, car l'expression (7) est la somme des résidus de $G(u) F(a+p-u)$, relatifs à tous les pôles de $G(u)$. Ces pôles sont, dans le plan de la variable u , à l'origine et à gauche de l'origine ; ceux de $F(a+p-u)$, savoir $u = a+p, a+p+1, \dots$ sont, au contraire, l'un sur la parallèle à l'axe imaginaire, d'abscisse $p + \Re(a)$, les autres à droite de cette parallèle. Si donc ABCD est un rectangle, AB parallèle à l'axe imaginaire et d'abscisse γ , $0 < \gamma < p + \Re(a)$; BC et DA parallèles à l'axe réel et de part et d'autre de cet axe ; CD parallèle à l'axe imaginaire, ne passant par aucun pôle et d'abscisse égale à $-\infty$, l'expression (7) est égale à

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{ABCD} G(u) F(a+p-u) du.$$

On peut maintenant rejeter à l'infini les côtés BC et DA ; la fonction $G(u) F(a+p-u)$ se comportant, pour $u = \infty$, comme u^{-2} , d'après ce qui a été dit plus haut, on obtient ainsi l'équation intégrale

$$(8) \quad F(a) = R_p(a) + \frac{(-1)^p}{a(a+1) \dots (a+p-1)} K(a) \\ + \frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^p}{a(a+1) \dots (a+p-1)} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(u) F(a+p-u) du,$$

qui subsiste pour $\Re(a) > -p$, et $0 < \gamma < p + \Re(a)$.

Dans les limites de cette dernière intégrale, remplaçons le nombre réel γ par le nombre réel ou complexe $\frac{p+a}{2}$, dont l'abscisse est aussi comprise entre 0 et $p + \Re(a)$; faisons en outre le changement de variable $u = \frac{a+p}{2} + iz$; l'équation (8) s'écrit en définitive sous la forme

$$(9) \quad F(a) = R_p(a) + \frac{(-1)^p}{a(a+1) \dots (a+p-1)} K(a) \\ + \frac{(-1)^p}{2\pi} \frac{1}{a(a+1) \dots (a+p-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(\frac{a+p}{2} + iz\right) F\left(\frac{a+p}{2} - iz\right) dz.$$

§ II

La fonction $\cotg x$ satisfait à l'équation différentielle

$$(\cotg x)' = -\cotg^2 x - 1;$$

on fera, dans la formule (2),

$$p = 1, \quad f(x) = \cotg x, \quad g(x) = -\cotg x, \quad k(x) = -1.$$

La fonction $\boldsymbol{p}x$ de Weierstrass satisfait à l'équation différentielle

$$\boldsymbol{p}''x = 6\boldsymbol{p}^2x - \frac{1}{2}g_2;$$

on fera, dans (2),

$$p = 2, \quad f(x) = \boldsymbol{p}x, \quad g(x) = 6\boldsymbol{p}x, \quad k(x) = -\frac{1}{2}g_2;$$

nous supposons de plus les périodes 2ω et $2\omega'$ de $\boldsymbol{p}x$ telles que la période de module minimum, $2m\omega + 2n\omega'$, ait son module > 1 .

Soit alors, d'une part,

$$C(a) = \int_0^1 x^a \cotg x \, dx, \quad \Re(a) > 0,$$

$$\chi(a) = \frac{\cotg 1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)(a+2)},$$

et, d'autre part,

$$P(a) = \int_0^1 x^{a+1} \boldsymbol{p}x \, dx, \quad \Re(a) > 0;$$

$$\varphi(a) = \frac{\boldsymbol{p}1}{a+2} - \frac{\boldsymbol{p}1}{(a+2)(a+3)} - \frac{g_2}{2} \frac{1}{(a+2)(a+3)(a+4)};$$

la formule (9) nous donne, pour les deux fonctions $C(a)$ et $P(a)$, les équations intégrales, valables pour $\Re(a) > 0$,

$$C(a) = \chi(a) + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a+1} \int_{-\infty}^{+\infty} C\left(\frac{a}{2} + iz\right) C\left(\frac{a}{2} - iz\right) dz$$

et

$$P(a) = \varphi(a) + \frac{3}{\pi} \frac{1}{(a+2)(a+3)} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{a}{2} + iz\right) P\left(\frac{a}{2} - iz\right) dz,$$

qui faisaient l'objet de la présente communication.

§ III

Un calcul entièrement analogue au précédent, mais donnant un résultat moins simple, peut être effectué pour la fonction $sn u$, en supposant les périodes $2K$ et $2iK'$ de $\Theta(u)$ choisies de façon que le pôle de $sn u$, le plus rapproché de l'origine, ait son module > 1 . Posons :

$$S(a) = \int_0^1 sn x dx, \quad \Re(a) > 0,$$

et partons de l'équation différentielle

$$sn''u = 2k^2 sn^3u - (1 + k^2) sn u,$$

nous obtiendrons l'équation fonctionnelle

$$S(a) + \frac{1+k^2}{a(a+1)} S(a+2) = \frac{sn 1}{a} - \frac{sn'1}{a(a+1)} - \frac{k^2}{2\pi^2} \frac{1}{a(a+1)} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} S(u) du \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} S(v) S(a+2-u-v) dv,$$

valable pour

$$\Re(a) > 0, \quad 0 < \gamma < 2 + \Re(a), \quad 0 < \delta < 2 - \gamma + \Re(a).$$

SUR LES RÉSEAUX R ORTHOGONAUX

Note de M. Fernand SIMONART

1. Le nom de surface R a été donné par M. A. Demoulin ⁽¹⁾ à une surface qui possède au moins un réseau R , c'est-à-dire un réseau conjugué dont les tangentes engendrent des congruences W . Nous considérerons spécialement les surfaces R sur lesquelles les lignes de courbure forment un réseau R . Tel est le cas des surfaces pseudosphériques.

L'introduction des surfaces R est liée au problème de Moutard-Guichard sur la détermination des congruences W ayant une nappe focale S donnée à priori. De ce problème, Guichard ⁽²⁾ (1890) a donné une solution qui dérive d'une transformation de Moutard relativement à une équation de même nom à partir d'une intégrale particulière; la seconde

⁽¹⁾ A. DEMOULIN, Sur les surfaces R et les surfaces Ω , *C. R.* t. 153, p. 590.

⁽²⁾ L. BIANCHI, *Lezioni*, VII, p. 52.

nappe focale s'obtient alors au moyen de trois quadratures. Mais comme l'a montré M. Fubini ⁽¹⁾ (1919) et, après lui, M. Jonas ⁽²⁾ (1920), on peut se débarrasser de toute quadrature si l'on parvient à une solution du système différentiel linéaire

$$\frac{\partial a}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} b = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} a = 0.$$

La méthode de M. Jonas n'est d'ailleurs qu'une transformation analytique de la méthode de Guichard ⁽³⁾.

On retrouve rapidement ces relations ainsi que les équations de la seconde nappe focale en appliquant les résultats généraux de la méthode cinématique ⁽⁴⁾ que nous avons fait connaître en 1933. C'est donc de ce problème que nous aurons d'abord à nous occuper pour en déduire ensuite les caractères analytiques des surfaces R et, en particulier, des surfaces possédant un réseau R orthogonal.

2. Considérons sur S une famille de courbes définies par l'équation différentielle

$$m du + n dv = 0 \quad (1)$$

et cherchons sous quelles conditions la congruence de leurs tangentes est W. Pour cela, il faut et il suffit que la tangente (du, dv) en tout point $P(u, v)$ d'une courbe (1) soit perpendiculaire à la direction $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dans laquelle se déplace le point P dans une déformation infinitésimale de S, ou que l'on ait

$$\Sigma \bar{x} dx = 0$$

ou encore

$$\Sigma \bar{x} x_u du + \Sigma \bar{x} x_v dv = 0. \quad (2)$$

L'élimination de du, dv entre (1) et (2) donne

$$\Sigma \bar{x} x_u = m, \quad \Sigma \bar{x} x_v = n. \quad (3)$$

Introduisons la variable auxiliaire l définie par

$$\Sigma \bar{x} \lambda = l. \quad (4)$$

Les conditions cherchées se confondent avec les équations de la déformation infiniment petite de S, savoir (*, p. 279)

(1) F. FUBINI, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 43, 1919, p. 29.

(2) H. JONAS, Ueber die Konstruktion der W-Kongruenzen, *Jahresber. B.* 29, 1920.

(3) A. VAN DORP, Over W-Stralencongruenties en R-Oppervlakken. Groningen 1930.

V. VAN BOUCHOUT, Congruences W, *Recherches du Sémin. de math.* Louvain 1934.

(4) F. SIMONART, Sur le rôle des opérateurs généralisés de Beltrami, *Bull. Ac. R. Belg.* XIX, 1933.

* Voir aussi notre Cours de géométrie infinitésimale, Méthode cinématique, § 24, 1938.

$$\begin{aligned} m_u - p m - q n - L l &= 0, \\ n_v - p'' m - q'' n - N l &= 0, \\ m_v + n_u - 2p' m - 2q' n - 2M l &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

On peut encore substituer à la dernière les deux suivantes

$$\begin{aligned} m_v - p' m - q' n - M l &= H \varphi, \\ n_u - p' m - q' n - M l &= H \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

φ désignant la fonction caractéristique de Weingarten pour S, de sorte que

$$m_v - n_u = 2 H \varphi. \quad (7)$$

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du foyer associé au foyer P(x, y, z).
Du système linéaire homogène

$$\Sigma (x_1 - x) \lambda = 0, \quad \Sigma (x_1 - x) \bar{x} = 0,$$

on tire d'abord

$$x_1 = x + \frac{1}{\varphi} (v \bar{y} - \mu \bar{z}),$$

ensuite, compte tenu de (3),

$$x_1 = x + \frac{1}{H \varphi} (n x_u - m x_v),$$

enfin, eu égard à (7),

$$x_1 = x + \frac{2}{m_v - n_u} (n x_u - m x_v). \quad (8)$$

3. Les formules obtenues se simplifient si les asymptotiques de S sont prises comme courbes coordonnées ($L = 0, N = 0$). Dans ce cas, m et n doivent vérifier le système

$$\begin{aligned} m_u - p m - q n &= 0, \\ m_v - p'' m - q'' n &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Faisons

$$m = e^\theta b, \quad n = e^\theta a, \quad (10)$$

la fonction θ étant définie par les équations

$$\theta_u = p, \quad \theta_v = q'',$$

compatibles en vertu de l'identité bien connue

$$p_v = q''_u.$$

On a d'ailleurs les relations

$$e^\theta = \frac{H}{\sqrt{\rho}}, \quad k = -\frac{1}{\rho^2}.$$

En introduisant ces notations dans (9), on obtient le système réduit de Fubini

$$\begin{aligned} a_v - p''b &= 0, \\ b_u - qa &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

et le foyer x_1, y_1, z_1 est donné par

$$x_1 = x + \frac{2}{b_v + bq'' - a_u - ap} (ax_u - bx_v). \quad (12)$$

La recherche des congruences W ayant une nappe focale donnée S dérive donc uniquement de l'intégration du système linéaire (11); cela fait, le foyer (x_1, y_1, z_1) associé à un foyer (x, y, z) de S s'obtient à partir de (12) par des calculs algébriques. Ce résultat essentiel, dû à M. H. Jonas, est lié à présent, de la manière la plus simple, au problème de la déformation infinitésimale d'une surface.

4. On vient de voir que sous les conditions (11), les tangentes aux courbes de la famille

$$b du + a dv = 0, \quad (13)$$

engendrent une congruence W. Appliquons ce résultat aux courbes conjuguées de (13) définies par l'équation

$$b du - a dv = 0,$$

ce qui introduit les restrictions nouvelles

$$a_v + p''b = 0, \quad b_u + qa = 0, \quad (14)$$

De (11) et de (14) on déduit

$$\begin{aligned} a_v &= 0, & b_u &= 0, \\ a &= U, & b &= V, \end{aligned}$$

U désignant une fonction de u seul, V de v seul. L'équation (13) s'écrit

$$UV \left(\frac{du}{U} + \frac{dv}{V} \right) = 0.$$

Un changement de paramètres sur les asymptotiques u, v , transforme cette dernière équation dans la suivante

$$R (\bar{d}u + \bar{d}v) = 0$$

et les conditions (11) s'écrivent

$$R_{\bar{v}} - p''R = 0, \quad R_{\bar{u}} - qR = 0,$$

ce qui entraîne

$$p''_u = q_v, \quad (15)$$

pour un choix convenable des paramètres sur les asymptotiques. C'est la

propriété caractéristique des surfaces R (A. Demoulin). Si elle est réalisée, le réseau

$$du^2 - dv^2 = 0$$

est un réseau R.

5. La classe des surfaces R rapportées à leurs asymptotiques u, v est déterminée analytiquement par les équations

$$L = 0, \quad N = 0, \quad p''_u = q_v \quad (16)$$

et les équations de Gauss-Codazzi

$$K = -\frac{1}{H} \left[w_{uv} + \left(\frac{H}{E} q' \right)_u + \left(\frac{H}{G} p' \right)_v \right] = -\frac{M^2}{H^2}, \quad (17)$$

$$\left(\log \frac{M}{H} \right)_u = -2q', \quad \left(\log \frac{M}{H} \right)_v = -2p', \quad (18)$$

que doivent vérifier les coefficients E, F, G, L, M, N des deux formes fondamentales.

Rappelons aussi que l'on a identiquement (18) sur R

$$p'_u = q'_v, \quad (19)$$

ou, ce qui en revient au même,

$$p_v = q''_u. \quad (20)$$

Si l'on veut que les lignes de courbure forment un réseau R, il faut adjoindre aux équations précédentes la condition

$$E = G,$$

de sorte que E, F, G doivent vérifier le système différentiel

$$E = G, \quad p'_u = q'_v, \quad p''_u = q_v. \quad (21)$$

Il en est ainsi des surfaces pour lesquelles on a identiquement

$$p' = 0, \quad q' = 0,$$

c'est-à-dire des surfaces pseudosphériques ou encore des surfaces sur lesquelles les asymptotiques découpent un réseau de Tchebychef, les trois équations (21) étant alors identiquement vérifiées si l'on fait choix des paramètres canoniques sur les asymptotiques.

6. Plus généralement, supposons que l'on ait

$$p' = 0, \quad 2q' = \frac{U'}{U}, \quad (22)$$

U étant une fonction de u seul. La courbure totale K qui est donnée par

$$K = -\frac{1}{U^2}, \quad (23)$$

conserve la même valeur le long d'une asymptotique v . Les surfaces considérées rentrent dans la classe C des surfaces rencontrées par Bianchi (Lezioni Vol. II, p. 74) à l'occasion de l'étude des congruences W dont les deux nappes focales ont aux points correspondants même courbure totale

$$K = - \frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2}.$$

La détermination analytique de ces surfaces revient à la recherche de trois solutions θ_i d'une équation de Moutard telles que

$$\Sigma \theta_i^2 = \varphi(u) + \psi(v).$$

Revenons au cas envisagé au début de ce numéro. En outre de la condition (23), nous attribuons à une surface R de la famille la propriété de posséder un réseau R orthogonal, le réseau des lignes de courbure. Pour une telle surface, les coefficients des deux formes fondamentales peuvent s'obtenir sous forme finie.

Les équations (22) en E et F s'écrivent, en effet,

$$\begin{aligned} E E_v - F E_u &= 0, \\ \frac{E E_u - F E_v}{E^2 - F^2} &= \frac{U'}{U}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{E_u}{E} = \frac{U'}{U}, \quad E = G = UV,$$

V désignant une fonction de v seul. De là

$$F = \frac{U^2 V'}{U'}.$$

Il faut encore exprimer que ces valeurs vérifient la troisième équation (21). Pour simplifier les calculs, on posera

$$U = e^{U_1}, \quad V = e^{V_1},$$

de sorte que

$$E = G = e^{U_1 + V_1}, \quad F = \frac{V_1'}{U_1'} e^{U_1 + V_1}. \quad (24)$$

En introduisant ces valeurs dans la condition $p_u'' = q_x$, on trouve, pour déterminer U_1 et V_1 , l'équation

$$U_1'' \left(1 - \frac{V_1'^2}{U_1'^2} \right) = 0 \quad (25)$$

dont la solution générale est donnée par

$$U_1 = au + b \quad (a, b = \text{cte})$$

et un choix arbitraire de la fonction V_1 de v seul.

Il est intéressant d'observer que l'équation provenant de l'annulation du second facteur de (25),

$$U_1'^2 = V_1'^2 = a^2,$$

a pour solution générale

$$U_1 = au + b, \quad V_1 = \pm av + c.$$

Il faut écarter ici les valeurs de $a \neq 0$ pour lesquelles on aurait, suivant (24),

$$E = G = e^{U_1+V_1}, \quad F = \pm e^{U_1+V_1},$$

la surface cherchée se réduisant alors à une développable isotrope.

On écartera aussi la valeur $a = 0$, qui laisserait F indéterminé et pour laquelle on aurait

$$E = G = e^{b+c}, \quad K = -e^{-2b} = -r^2.$$

Pour un choix convenable des paramètres sur les asymptotiques, la surface est définie, à une translation et une symétrie près, par

$$\begin{aligned} E &= 1, & F &= \cos \omega, & G &= 1, \\ L &= 0, & M &= r \sin \omega, & N &= 0, \\ \omega_{uv} &= r^2 \sin \omega. \end{aligned}$$

Ce sont précisément les équations des surfaces pseudosphériques rapportées à leurs asymptotiques u, v .

Dans le cas général, les coefficients des deux formes fondamentales sont donnés par

$$\begin{aligned} E &= V e^{au}, & F &= \frac{V'}{a} e^{au}, & G &= V e^{au}, \\ L &= 0, & M &= V \sin \omega, & N &= 0, \\ \cos \omega &= \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{V'}{aV}. \end{aligned} \quad (26)$$

7. Les propriétés des surfaces R de la classe considérée plus haut résultent des formules (26).

La dernière exprime que l'angle ω des asymptotiques u, v , est une fonction de v seul : les asymptotiques v coupent une asymptotique particulière u sous un angle constant.

Dans le cas actuel, la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_u}$ d'une asymptotique u au point (u, v) , déterminée par la formule

$$\frac{\sqrt{E}}{\rho_u} = \omega_u - \frac{H}{G} p',$$

est identiquement nulle : les asymptotiques u sont des géodésiques de la surface.

Une surface R de la famille est minima sous la condition $F=0$ ou $V'=0$. Faisons $V=1$ dans (26). Le ds^2 de R est réductible à la forme

$$ds^2 = e^{au} (du^2 + dv^2).$$

Les asymptotiques tracent sur R un réseau orthogonal et isotherme ; dès lors, les asymptotiques v sont des cercles géodésiques. La surface R est ainsi rattachée à la famille des surfaces D contenant deux systèmes de cercles géodésiques orthogonaux. Un calcul simple montre encore qu'en chaque point de R les lignes de courbure ont même courbure géodésique.

8. Les résultats précédents nous introduisent dans l'étude des surfaces minima possédant un réseau R orthogonal.

Les équations du problème sont, à présent,

$$E = G, \quad F = 0, \quad p'_u = q'_v, \quad (27)$$

la relation $p'_u = q'_v$ se réduisant à une identité. Compte tenu des deux autres, la dernière équation (27) s'écrit

$$(\log E)_{uu} = (\log E)_{vv}. \quad (28)$$

Effectuons le changement de variables indépendantes défini par

$$v + u = \bar{u}, \quad v - u = \bar{v}, \quad (29)$$

ce qui revient à rapporter la surface R à ses lignes de courbure \bar{u}, \bar{v} . L'équation transformée de (28),

$$(\log E)_{\bar{u}\bar{v}} = 0,$$

a pour intégrale générale

$$E = UV,$$

U étant une fonction de u seul, V de \bar{v} et le ds^2 de R , rapportée à ses lignes de courbure u, v , a la forme caractéristique

$$ds^2 = UV (du^2 + dv^2). \quad (30)$$

Les paramètres u, v étant isothermes, on est ramené aux équations classiques

$$\begin{aligned} E &= UV, & F &= 0, & G &= UV, \\ L &= 1, & M &= 0, & N &= -1, \end{aligned}$$

la fonction UV vérifiant l'équation de Gauss

$$\log'' U + \log'' V = \frac{2}{UV}.$$

Une telle égalité ne peut avoir lieu que pour une valeur constante de U ou de V . On peut, sans restriction, poser $V=1$; l'équation se réduit à

$$\log'' U = \frac{2}{U}$$

et son intégrale générale est donnée par

$$U = \frac{1}{a^2} ch^2(au + b), \quad (a, b = \text{cte}).$$

Les surfaces minima possédant un réseau R formé des lignes de courbure u, v sont donc entièrement définies par leurs paramètres différentiels

$$\begin{aligned} E = G &= \frac{1}{a^2} ch^2 au, & F &= 0, \\ L &= 1, & M &= 0, & N &= -1. \end{aligned}$$

9. Des lignes de courbure, u sont des géodésiques, v des cercles géodésiques. Les tangentes aux lignes u engendrent une congruence W normale. Suivant un théorème de Weingarten, les surfaces de la famille sont applicables sur des surfaces de révolution.

Pour déterminer celles-ci, on fera sur les lignes u le changement de paramètre

$$\frac{1}{a} ch au/u,$$

ce qui ramène le ds^2 à la forme canonique

$$ds^2 = \frac{u^2}{a^2 u^2 - 1} du^2 + u^2 dv^2.$$

La cote $z(u)$ de la surface de révolution est alors définie par l'équation différentielle

$$1 + z'^2 = \frac{u^2}{a^2 u^2 - 1},$$

et

$$z = \int \sqrt{\frac{(1 - a^2)u^2 + 1}{a^2 u^2 - 1}} du$$

est l'équation du méridien cherché dans le plan des (z, u) . Le caténoïde correspond aux valeurs ± 1 du paramètre a .

Les quelques exemples rencontrés ici ont montré l'intérêt que présente l'étude des surfaces possédant un réseau R orthogonal. Des cas plus généraux, tels celui des surfaces D et celui des surfaces isothermiques ou même des surfaces W , peuvent être proposés en liaison avec les congruences W qui leur sont associées.

Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles

Les Équations de Mayevski

Les divers amortissements

PAR

M. ROBERT D'ADHÉMAR

Je conserve toujours les mêmes notations, et les mêmes axes de référence. Au centre de gravité du projectile, nous avons le trièdre $Gxyz$; Gz coïncide avec l'axe de figure. Le sens d'orientation est le sens direct, le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre. La rayure est à gauche.

Le premier moment \mathbf{M}_x est celui des forces extérieures par rapport à Gx . Le deuxième moment \mathbf{M}_y est celui des forces extérieures par rapport à Gy . Le troisième moment \mathbf{M}_z est le moment des forces extérieures par rapport à Gz .

Le plan de référence OHN est un plan perpendiculaire sur la tangente de la trajectoire, en avant, la distance GO étant égale à 1.

La vitesse de rotation imprimée par les rayures est Ω ; ω est la vitesse réduite. La fonction $P(t)$ se déduit immédiatement de l'expression du premier moment. La fonction $J(t)$ représente la valeur absolue de la vitesse d'abaissement de la tangente. La fonction $Q(t)$ est la fonction de Mayevski, et l'on a :

$$Q = \frac{P}{J}.$$

1. LES ÉQUATIONS DE MAYEVSKI.

Les équations du Général Mayevski ont une réelle importance, mais je ne dis pas : une importance exclusive. Il serait difficile de les oublier, d'abord au point de vue historique, ensuite parce qu'elles constituent un élément fondamental de comparaison.

Au point de vue historique, la théorie de Mayevski est le premier grand effort, la première intuition solide. Les premiers travaux de Magnus de

Sparre ont conservé un contact étroit avec ceux de Mayevski. Magnus de Sparre n'a jamais cessé — mais avec quelle originalité — de faire usage de la fonction Q de Mayevski, ses théories habiles et variées étant, naturellement, de plus en plus éloignées de la théorie primitive de Mayevski.

Je reproduis ici une conclusion de M. de Sparre : « Remarquons que les deux équations différentielles auxquelles nous sommes arrivés... ne diffèrent pas au fond de celles obtenues par le Général Mayevski ⁽¹⁾... »

Ceci a été écrit en 1875. Consultons maintenant le Mémoire publié en 1891 (page 85). Les équations (14) et (15) sont équivalentes aux équations de Mayevski ⁽²⁾.

Les équations de Mayevski ont été employées par tous les balisticiens, le Général Zabudski, le Docteur Cranz, etc.

Nous retrouvons partout la fonction Q de Mayevski ; c'est un fait. Je voudrais montrer que les équations de Mayevski sont un élément de comparaison, de classification, indispensable.

Les équations de Mayevski ont été retrouvées par M. Burzio, par une méthode très brillante ⁽³⁾. M. Burzio emploie les méthodes modernes de la Mécanique et il obtient les équations de Mayevski par l'emploi judicieux du théorème du moment cinétique.

Regardons bien sa démonstration, qui est reproduite, aux notations près, dans l'un de mes Mémoires ⁽⁴⁾, et nous découvrirons — c'est capital — les hypothèses, plus ou moins cachées, admises par M. Burzio.

1° La Dérivation est négligée. A ce point de vue, l'accord est général ; c'est normalement la première approximation. Mais on oublie parfois de dire qu'il s'agit du tir de plein fouet ou du tir sous un angle nettement moindre que 90° , avec une vitesse initiale assez grande. Si le tir est *courbe*, le fait de négliger la Dérivation pourrait être critiqué.

2° M. Burzio suppose que l'on a :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{M}_z = 0, \\ (2) \quad & \rho = \Omega = \text{const.} \end{aligned}$$

Cette approximation peut être admise sans aucune difficulté.

3° Il y a autre chose, et ceci ne peut être admis à priori. M. Burzio emploie un mode d'approximation classique, qui consiste dans la confusion

(1) Mouvement des projectiles oblongs dans le cas du tir de plein fouet, Gauthier-Villars, 1875, page 395. C'est le premier Mémoire du COMTE DE SPARRE.

(2) COMTE DE SPARRE, Sur le mouvement des projectiles dans l'air, *Annales de la Soc. sc. de Bruxelles*, 1891.

(3) FILIPPO BURZIO, Recherches sur la rotation des projectiles, *Mémorial de l'Artillerie Française*, 1927. Ce travail est le résumé de plusieurs travaux antérieurs.

(4) Étude de l'approximation et de la stabilité, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1936, A.

de l'axe de figure et de l'axe du moment cinétique. Que vaut ce mode d'approximation ?

4° Il y a encore, dans la théorie de M. Burzio, une hypothèse qui n'est même pas mentionnée, tant elle paraissait naturelle autrefois : le deuxième moment est tenu pour *négligeable*.

Au début, le projectile tournant était considéré comme étant une toupie, la poussée de l'air jouant le rôle du poids, et le deuxième moment n'était jamais introduit.

Ensuite il a été introduit, mais on a fixé, à priori, son expression et son signe, sans aucune justification.

Il faut voir si l'omission est légitime. Si elle ne l'est pas, il faut éviter de prendre au hasard l'expression de ce deuxième moment.

L'emploi des équations (GY), que j'ai établies, permet de répondre à plusieurs questions importantes. La Dérivation étant négligée, les équations (GY) prennent la forme (GYS). C'est une approximation et une grande simplification.

Écrivons les équations de Mayevski et Burzio, avec les notations que j'ai adoptées, et dont on trouvera la signification dans mes travaux antérieurs :

$$(3) \quad \delta' = J \cos \psi ,$$

$$(4) \quad \psi' \delta = P \delta - J \sin \psi .$$

En employant les équations (GYS), je conclus que les équations de Mayevski sont équivalentes aux suivantes :

$$(5) \quad p \equiv 0 , \quad \text{équation exacte ,}$$

$$(6) \quad q = P \delta , \quad \text{équation approchée .}$$

Je dirai que les équations (3) et (4) sont les équations (MA), et que les équations (5) et (6) sont les équations (MB). Les équations (MB) sont la forme définitive des équations de Mayevski.

Maintenant je vais *obtenir immédiatement* les équations (5) et (6), et cela nous donnera le sens exact des équations de Mayevski. Considérons la première équation du théorème du moment cinétique :

$$(7) \quad \mathbf{B}[p' + q (\omega - r)] = \mathbf{M}_x .$$

L'accent représente toujours la dérivation par rapport au temps t . Nous pouvons aussi bien écrire :

$$(8) \quad p' + q (\omega - r) = \omega P \delta .$$

Prenons : $p \equiv p' = 0$; c'est l'équation (5), ou bien (3). L'équation (8) prend la forme suivante :

$$(9) \quad q (\omega - r) = \omega P \delta .$$

Je suppose remplie la condition ci-dessous :

$$(10) \quad |\psi'| = \beta(w).$$

Il en résulte :

$$(11) \quad |r| = \beta(w).$$

Par suite, l'équation (9) prend la forme (6) ou bien (4).

J'admets, à priori, la *première* équation de Mayevski, et j'obtiens la *seconde* en supposant simplement que la *condition* (10) est vérifiée.

Faisons une remarque au sujet des notations. Lorsque deux paramètres X et Y sont voisins, j'écris :

$$\frac{X}{Y} \sim 1.$$

Cela signifie que l'on a, par exemple :

$$1 - \frac{1}{10} < \frac{X}{Y} < 1 + \frac{1}{10},$$

ou

$$1 - \frac{1}{100} < \frac{X}{Y} < 1 + \frac{1}{100}, \text{ etc.}$$

Le voisinage est plus ou moins *étroit*.

Lorsque X et Y sont du même ordre, j'écris :

$$Y = O(X).$$

Cela signifie que l'on a, par exemple :

$$1 - \frac{1}{5} < \frac{X}{Y} < 1 + \frac{1}{5},$$

$$1 - \frac{1}{4} < \frac{X}{Y} < 1 + \frac{1}{4},$$

$$1 - \frac{1}{3} < \frac{X}{Y} < 1 + \frac{1}{3} \dots$$

C'est un voisinage plus ou moins *large*.

Enfin, lorsque Y est petit par rapport à X, j'écris :

$$Y = \beta(X).$$

Cela signifie que l'on a, par exemple :

$$Y = \frac{X}{1000}, \quad Y = \frac{X}{100}, \dots$$

Par tolérance, j'emploierai encore le même symbole, si l'on a, par exemple :

$$Y = \frac{X}{10}.$$

Mais il serait paradoxal de l'employer si l'on a, par exemple :

$$Y = \frac{X}{3}, \quad \text{ou} \quad Y = \frac{X}{4}.$$

Tous ces symboles sont souples, et cette *souplesse* est commode. Il faut seulement éviter d'en abuser et d'arriver à des affirmations paradoxales.

Revenons aux équations de Mayevski. Nous avons, d'après les équations (GYS) :

$$r = \psi' - \delta J \sin \psi.$$

Si la condition (10) est vérifiée, et si δ et J sont assez petits, nous pouvons écrire :

$$\omega - r \sim \omega - \psi' \sim \omega.$$

Nous savons que J est petit par rapport à 1, si la vitesse v , sur la trajectoire, est assez grande.

Nous excluons donc les *petites vitesses*, et, sans jamais fixer des limites fermes, nous pouvons dire, par exemple, qu'une vitesse moindre que 200 mètres par seconde est une vitesse faible, sur une trajectoire.

Il est très normal, à plusieurs points de vue, d'exclure les vitesses faibles. Par exemple, si la vitesse décroît trop, sur la trajectoire, la valeur numérique du premier moment décroît trop, et la valeur de la fonction $Q(t)$ décroît trop. La valeur numérique du premier moment pourrait aussi devenir faible, si l'altitude du projectile devenait grande, par suite de la décroissance du coefficient balistique.

Si la vitesse devient faible, ou bien si l'altitude devient grande, certaines circonstances sont modifiées, de sorte que certains résultats, qui paraissent nets pour un tir de plein fouet, pourraient être en défaut pour un tir courbe. Il est prudent de faire d'abord l'étude du tir de plein fouet.

J'ai donné, dans mes travaux précédents, quelques indications sommaires sur les trajectoires. Je cite deux exemples correspondant à un même angle de départ, 10° :

Première trajectoire

vitesse initiale 525.

vitesse au point de chute 271.

Seconde trajectoire

vitesse initiale 850,

vitesse au point de chute 277.

Nous voyons bien que, sur une trajectoire de plein fouet, la vitesse reste, assez grande.

Les circonstances changent si l'angle de départ varie fortement. Considérons un même projectile et une même vitesse initiale, 525, ms, nous avons les résultats suivants :

angle de départ	vitesse minimum
30°	229
50°	177
70°	99

Ajoutons une indication sur la Dérivation totale. Considérons un tir de plein fouet et un calibre moyen. Pour une portée de 4000 m, nous pouvons avoir une Dérivation de 20 m. Considérons un mortier de gros calibre, et la même portée de 4000 m. Si l'angle de départ est de 20°, nous pouvons avoir une Dérivation de 60 m. Si l'angle de départ est de 65°, nous pouvons avoir une Dérivation de 380 m. Il pourrait être dangereux de négliger, dans une théorie, une pareille Dérivation.

En ce qui concerne l'écart, je suppose toujours la *tenue* bonne, ou assez bonne. Par exemple, je suppose toujours δ assez petit pour que l'on puisse écrire :

$$(12) \quad \operatorname{tg} \delta \sim \delta \sim \sin \delta .$$

Dans le cas contraire, la théorie deviendrait beaucoup plus difficile.

Je rappelle ici une observation assez importante. L'écart n'est pas une variable *algébrique* ; c'est une variable *orientée* et l'on doit poser :

$$\delta \geq 0 .$$

Il en résulte :

$$\mathbf{M}_x \geq 0 .$$

Supposons que $\delta(t)$ passe par la valeur zéro, ce point n'étant pas un minimum ordinaire à tangente horizontale. Si nous admettons des valeurs négatives de δ , nous devons, à cet instant, *renverser* le sens d'orientation antérieurement adopté. Cette modification subite du sens d'orientation serait assez bizarre ⁽¹⁾.

Néanmoins, M. Popoff a proposé de donner à δ des valeurs négatives ⁽²⁾.

(1) Le mouvement gyroscopique élémentaire. Essai d'interprétation physique, *Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles*, 1937.

(2) K. POPOFF, Sur le mouvement pendulaire des projectiles, *Revue mathématique de l'Union interbalkanique*. Athènes, Imprimerie Nationale, 1936.

K. POPOFF, Sur le mouvement pendulaire des projectiles, *Mémorial de l'Artillerie Française*, 1936, p. 1145.

2. SUR LA VALIDITÉ DES ÉQUATIONS DE MAYEVSKI.

J'ai posé une *condition fondamentale*, la condition (10). Et maintenant, comment pouvons-nous savoir si cette condition est remplie ? Partons de l'équation (4). Je la suppose valable ; nous avons :

$$(13) \quad \psi' = P - \frac{J}{\delta} \sin \psi,$$

$$(14) \quad \frac{\psi'}{\omega} = \frac{P}{\omega} - \frac{J}{\omega \delta} \sin \psi,$$

en supposant, bien entendu, que δ n'est pas nul.

Nous considérons un tir de plein fouet, prolongé, plus ou moins, au delà du point de chute. Nous savons qu'il n'est pas évident que les équations de Mayevski soient applicables au tir courbe. Sur la partie utile de la trajectoire, la fonction $P(t)$ est décroissante. A l'origine fictive (après les irrégularités initiales), on a :

$$(15) \quad \frac{P_0}{\omega} = \beta(1).$$

Pour connaître le sens de cette relation (15), il faut considérer la période des irrégularités initiales, et le coefficient numérique dit « coefficient de stabilité » ⁽¹⁾.

Je suppose que l'on ait, au moment de la prestabilisation :

$$\sigma = 1, \quad 1 + \sigma = 2.$$

La relation (15) sera vérifiée d'une manière acceptable. Elle serait mieux vérifiée si l'on avait :

$$\sigma > 1, \quad 1 + \sigma > 2.$$

Posons :

$$(16) \quad \frac{P}{\omega} = \beta(1).$$

La fonction $P(t)$ décroît vite, de sorte que la relation (16) n'est pas bien vérifiée, au début de la trajectoire, mais elle est bien satisfaite quand on s'éloigne un peu de l'origine de la trajectoire.

Fixons maintenant une condition relative à δ , en supposant :

$$(17) \quad \omega \delta = 0(1), \quad \text{ou bien} \quad \omega \delta > 1.$$

Il en résultera :

$$(18) \quad \left| \frac{\psi'}{\omega} \right| = \beta(1).$$

⁽¹⁾ Voir mon Mémoire récent : Les états d'instabilité virtuelle, les indéterminations, les perturbations initiales, *Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles*, 1938, I.

Le symbole $O(1)$ doit avoir, comme le symbole $\beta(1)$, un sens un peu élastique. Nous ne pouvons rien faire, si nous n'acceptons pas une certaine souplesse dans notre notion d'approximation.

La relation (18) se déduit des conditions (16) et (17) et de la remarque suivante. La vitesse restant supérieure à 200 ms, ou 150 ms, ou encore 100 ms, on a :

$$(19) \quad J = \beta(1).$$

Nous savons qu'une vitesse de 100 mètres par seconde est une vitesse très faible, qui n'est pas atteinte dans le tir de plein fouet.

Je conclus. Si v reste assez grand, et si δ n'est pas trop voisin de zéro, la relation (18) sera vérifiée, et l'équation (4) de Mayevski aura une valeur, comme équation approchée.

Si δ est très voisin de zéro, par exemple, si $\omega\delta$ est notablement inférieur à 1, l'équation (4) de Mayevski donnerait, *si elle était valable*, une grande valeur pour $|\psi'|$. Mais je dois rappeler ici une observation que j'ai faite antérieurement. Si δ est très voisin de zéro (presque nul), les équations de Mayevski *perdent toute signification*.

Ce fait important est très clair, si nous faisons usage des deux premières équations (GYS), que j'écris :

$$p = \delta' - J \cos \psi,$$

$$q = \psi'\delta + J \sin \psi.$$

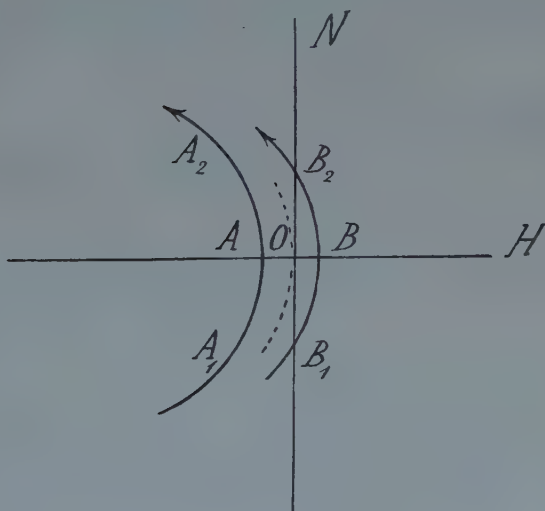


FIG. 1.

Premier cas. Mouvement de révolution.

Nous avons un minimum de δ lorsque le point a occupe la position B (Fig. 1). On a :

$$\psi = 3 \frac{\pi}{2}, \sin \psi = -1, \frac{d\psi}{dt} > 0.$$

Je suppose vérifiées les équations (MA); nous avons :

$$q = P\delta, \psi' = \beta(\omega),$$

et ψ' est borné supérieurement.

Par suite, si nous prenons δ très voisin de zéro, nous aurons la relation :

$$\psi'\delta = \beta(J), q \sim -J.$$

Il en résulte :

$$(20) \quad \delta \sim -\frac{1}{Q}.$$

Mais δ est positif.

Il y a une *contradiction*. Les équations de Mayevski n'ont aucun sens, au point B, si ce point est *très voisin* du point O

Second cas. Mouvement d'oscillation.

Nous avons un minimum de δ au point A (Fig. 1). On a :

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \sin \psi = 1, \frac{d\psi}{dt} < 0.$$

Je suppose vérifiées les équations (MA); nous avons :

$$q = P\delta, |\psi'| = \beta(\omega),$$

et $|\psi'|$ est borné supérieurement.

Par suite, si δ est très voisin de zéro, nous aurons :

$$|\psi'|\delta = \beta(J), q \sim J.$$

Il en résulte :

$$(21) \quad \delta \sim \frac{1}{Q}.$$

Il y a une *contradiction*. En effet, la trajectoire est donnée, la valeur de Q est une donnée. Par contre, la valeur de δ est aussi petite que nous le voulons. La contradiction existe bien. Les équations de Mayevski n'ont aucun sens, au point A, si ce point est *très voisin* du point O.

Troisième cas. Écart nul.

Nous sommes au point O. Je suppose vérifiées les équations (MA). Si l'on a :

$$\delta = 0 \quad \text{et} \quad |\psi'| \text{ fini,}$$

il en résulte nécessairement :

$$(22) \quad \sin \psi = 0.$$

Donc la courbe (α) (dessinée en pointillé) a pour tangente l'axe NON'. Notons qu'il est impossible de regarder le point O comme étant la *limite* d'un point A, ou d'un point B. Lorsque le point α passe par la position A, on a :

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \quad \psi \text{ continu,}$$

Lorsque α passe par B, on a ;

$$\psi = 3 \frac{\pi}{2}, \quad \psi \text{ continu.}$$

Si le point α passe par le point O, les circonstances sont autres. La tangente est NON' et le paramètre ψ est *discontinu* ; il passe brusquement de la valeur π à la valeur 2π . Nous pouvons écrire :

$$\psi = \pi, \quad \text{à l'instant } T - 0,$$

$$\psi = 2\pi, \quad \text{à l'instant } T + 0.$$

Supposons vérifiée l'équation (3) de Mayevski. Nous avons, lorsque le point α arrive à la position O, à l'instant $T - 0$:

$$(23) \quad \lim \delta' = -J.$$

Et nous avons, lorsque le point α dépasse cette position, à l'instant $T + 0$:

$$(24) \quad \lim \delta' = +J.$$

Il n'y a ici aucune difficulté.

Considérons la seconde équation de Mayevski. Nous avons, à l'instant $T - 0$, et à l'instant $T + 0$:

$$\lim q = 0,$$

la dérivée ψ' ayant une valeur finie quelconque. C'est une indétermination, mais l'indétermination est apparente, comme l'a dit M. Burzio. En effet, tenons compte de la première équation de Mayevski. Nous avons, à l'instant $T - 0$, et à l'instant $T + 0$:

$$(25) \quad \lim \frac{\sin \psi}{\delta} = \lim \frac{\cos \psi \cdot \psi'}{\cos \psi \cdot J}.$$

Et la seconde équation de Mayevski devient celle-ci :

$$(26) \quad 2\psi' = P.$$

Donc la dérivée ψ' est déterminée et continue, à l'instant T, Nous avons étudié le point O, sur la courbe (a), dessinée en pointillé (Fig. 1). Il faudra étudier aussi les points très voisins de O, sur cette courbe. Je le ferai après l'étude de la Théorie élémentaire.

Calculs numériques.

Je vais faire quelques calculs rapides, pour confirmer, d'une manière concrète, ce qui a été établi. Si nous tenons compte de la première équation de Mayevski, la première équation du théorème du moment cinétique prend la forme suivante :

$$(27) \quad x^2\delta - x(\omega\delta - J \sin \psi) + \omega P\delta - \omega J \sin \psi = 0,$$

en posant : $\psi' \equiv x$.

Prenons un minimum très petit, dans un mouvement d'oscillation, par exemple :

$$\delta = \frac{J}{\omega}, \quad \sin \psi = 1.$$

Nous trouvons : $x \sim -\omega$.

Il est clair que $|x|$ n'est pas négligeable par rapport à ω . La seconde équation (MA) n'a aucun sens.

Prenons un minimum très petit, dans un mouvement de révolution, par exemple :

$$\delta = \frac{J}{\omega}, \quad \sin \psi = -1.$$

Les racines x sont imaginaires ; les équations (MA) n'ont aucun sens.

Conclusion.

Après tous ces préliminaires, la conclusion sera nette. Si nous tenons compte de la première équation (MA), ψ' doit être une racine de l'équation (27), et nous devons prendre la racine négative du discriminant. Par exemple, si nous avons un minimum dans une révolution, nous devons prendre la plus petite solution. Si nous avons un minimum dans une oscillation, nous devons prendre la solution négative.

L'expression du discriminant est celle-ci :

$$D = \left(\omega + \frac{J}{\delta} \sin \psi \right)^2 - 4\omega P.$$

Je suppose vérifiée la condition :

$$(28) \quad \frac{J}{\delta} = \beta(\omega),$$

ce qui exclut les valeurs très petites de δ .

Nous pouvons écrire :

$$D \sim \left(\omega + \frac{J}{\delta} \sin \psi \right)^2 - 4P \left(\omega + \frac{J}{\delta} \sin \psi \right).$$

Je suppose vérifiée la condition :

$$(29) \quad 2P = \beta(\omega),$$

ce qui demandera un petit commentaire.

Nous pourrions écrire :

$$(30) \quad D \sim \left(\omega + \frac{J}{\delta} \sin \psi - 2P \right)^2.$$

La solution approchée sera donc :

$$2x = \omega - \frac{J}{\delta} \sin \psi - \left(\omega + \frac{J}{\delta} \sin \psi - 2P \right),$$

ou bien :

$$(31) \quad x = P - \frac{J}{\delta} \sin \psi.$$

Et l'on aura :

$$(10) \quad \frac{|x|}{\omega} = \beta(1).$$

Nous avons obtenu la seconde équation (MA).

Les conditions (28) et (29) sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (MA) soient valables.

Nous remarquons que la condition (29) est un peu plus sévère que la condition (16).

Il en résulte que les approximations sont seulement acceptables près de l'origine de la trajectoire. Elles deviennent rapidement bonnes, car la fonction $P(t)$ décroît vite, dans cette région.

Nous voyons bien maintenant ce que sont ces valeurs *presque nulles* de δ , qui doivent être *exclues*.

Il faudra, bien entendu, étudier séparément le cas suivant :

$$\delta = \sin \psi = 0.$$

Commentaire.

Nous remarquons que la condition (10) renferme, en réalité, *deux* conditions. Nous remarquons aussi que la condition (29) est plus *sévère* que la condition (16). Si l'on a, à l'origine fictive, à l'instant t_0 :

$$1 + \sigma = 2,$$

on aura :

$$\omega = 8P_0, \quad \text{ou bien} \quad 2P_0 = \frac{\omega}{4},$$

et la condition (29) ne sera pas bien vérifiée, à cet instant. Mais la fonction P décroît rapidement, de sorte que la condition (29) sera bien remplie, à une petite distance de l'origine de la trajectoire, et de mieux en mieux lorsque l'on s'éloigne de cette origine.

J'ai signalé plusieurs fois le rôle des valeurs de l'écart presque nulles, δ étant positif et différent de zéro. La condition (28) donne la définition de cette appellation « valeur presque nulle », définition un peu souple. Il est clair que 1 est petit par rapport à 10, en un sens, mais que 1 est petit par rapport à 100, en un sens plus net.

J'ai parlé un peu rapidement de la valeur zéro de l'écart ; j'y reviendrai. N'oublions pas qu'il s'agit de la valeur zéro, au moment du passage de la révolution à l'oscillation.

Je suppose toujours l'écart nul, à la bouche, à l'instant zéro, mais, pendant la période des irrégularités initiales, les équations de Mayevski doivent être *rejetées*. En particulier, poser, pendant cette période :

$$p \equiv 0,$$

serait invraisemblable.

Je rappelle que les équations (23) et (24) marquent une *discontinuité* de δ' , qui provient de la *définition* de δ , mais qui ne correspond pas à une singularité physique. On peut dire que cette singularité est apparente ⁽¹⁾.

En résumé, les équations (GYS) permettent de voir le véritable caractère des équations (MA), mais le mode d'approximation classique ne le permet pas.

Lorsque δ est positif et presque nul, les équations de Mayevski sont *inaptes* à représenter le phénomène physique. Si l'on fait subir des transformations analytiques à ces équations, cela ne supprimera pas cette *inaptitude*.

Les équations de Mayevski sont une belle réussite ; elles ont une importance capitale ; mais elles n'ont pas toute l'ampleur qui leur a été attribuée.

⁽¹⁾ Le mouvement gyroscopique élémentaire. Essai d'interprétation physique, *Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles*, 1937, 1.

Notons ce fait assez important. Nous posons la première équation de Mayevski. La seconde *en résulte*, ipso facto, si les conditions (28) et (29) *sont vérifiées*. Il faut exclure les valeurs de δ trop petites, et il faut que le coefficient σ ait une valeur assez grande.

Si la condition (29) n'est pas remplie d'une manière très satisfaisante dans la région de *l'origine* de la trajectoire, elle sera bien remplie dès que l'on s'éloignera un peu de cette origine, par suite de la décroissance assez rapide de la fonction $P(t)$.

3. DONNÉES NUMÉRIQUES.

Il faut donner des valeurs numériques moyennes, pour éviter tout malentendu. Il s'agit ici, en général, du tir de plein fouet. Néanmoins, nous pourrions prendre ce terme *au sens large* et considérer, par exemple, des angles de départ de l'ordre de 20° , ou même 30° , en supposant que la Dérivation est faible.

Faisons une remarque, au sujet du vocabulaire. On nomme « point de chute » le point d'altitude nulle sur la branche descendante. C'est le *point de chute théorique*. Le point de chute réel pourra se trouver avant ou après le point de chute des Tables. Nous supposons donc la trajectoire *prolongée* un peu au delà du point de chute théorique. C'est un prolongement *limité*, qui correspond, par exemple, à des tirs en montagne.

Pour fixer une limite, nous pourrions supposer, par exemple, que l'inclinaison de la tangente de la trajectoire ne dépasse pas -45° .

Le tir très courbe est exclu, et les parties très inclinées de la trajectoire sont exclues.

Je conserve toujours les mêmes notations. Il est nécessaire de connaître les valeurs numériques du produit ωJ , sur une trajectoire prolongée jusqu'en un point L, situé au delà du point de chute des Tables.

Considérons d'abord la vitesse de rotation imprimée par les rayures :

$$(32) \quad \Omega = \frac{2}{a} V_o j.$$

Je prendrai deux inclinaisons de rayures, 4° et 8° .

Nous avons :

$$\operatorname{tg} 4^\circ = 0,07 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} 8^\circ = 0,14.$$

Je donnerai donc au paramètre j les valeurs 0,07 et 0,14.

Prenons les données suivantes :

$$V_o = 500 \text{ ms}, \quad a = 0,07 \text{ ou } 70 \text{ mm}.$$

Avec la rayure à 4° , nous avons : $\Omega = 1000$.

Avec la rayure à 8° , nous avons : $\Omega = 2000$.

Prenons une vitesse initiale plus grande, et un calibre plus grand :

$$V_o = 800, \quad a = 0,10.$$

Avec la rayure à 4° , nous avons : $\Omega = 1120$.

Avec la rayure à 8° , nous avons : $\Omega = 2240$.

Prenons un calibre un peu plus grand :

$$V_o = 800, \quad a = 0,12.$$

Avec la rayure à 4° , nous avons : $\Omega = 933,3$.

Avec la rayure à 8° , nous avons : $\Omega = 1866,6$.

Prenons : $V_o = 400$, avec le même calibre de 120 mm, la valeur de Ω sera deux fois moindre. Mais il faut remarquer qu'une vitesse initiale aussi faible, associée à ce calibre, ne correspond pas à un tir de plein fouet.

Considérons la vitesse réduite :

$$(33) \quad \omega = v \Omega.$$

Le coefficient v est le rapport de deux moments d'inertie, et ce rapport peut varier de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{10}$, par exemple.

Prenons la valeur moyenne $\frac{1}{8}$.

Dans ces conditions, si la valeur de Ω varie entre

$$1000 \quad \text{et} \quad 2240,$$

la valeur de ω variera entre

$$125 \quad \text{et} \quad 280.$$

Nous avons ainsi des indications moyennes, pour des tirs de plein fouet au sens large.

Nous pourrions bien considérer une inclinaison finale de rayure de 10° , par exemple. Nous pourrions faire varier le calibre de 60 mm à 105 mm, par exemple. Peu importe ; il s'agit ici uniquement de fixer des caractères généraux.

Étudions maintenant la valeur absolue de la vitesse angulaire d'abaissement de la tangente de la trajectoire :

$$(34) \quad J = g \frac{\cos \tau}{v}.$$

Les circonstances peuvent être très diverses. Nous prendrons successivement quatre trajectoires, ce qui nous donnera des indications moyennes.

Première trajectoire : $V_o = 525$, $\alpha = 10^\circ$

	v	τ	J
origine	525	10°	$\frac{1}{52} \times 0,98$
sommet	319	0	$\frac{1}{32}$
point de chute	271	$-18^\circ 30'$	$\frac{1}{27} \times 0,95$

Le point de vitesse minimum est au delà du point de chute.

Deuxième trajectoire : $V_o = 850$, $\alpha = 10^\circ$

	v	τ	J
origine	850	10°	$\frac{1}{85} \times 0,98$
sommet	362	0	$\frac{1}{36}$
point de chute	277	-20°	$\frac{1}{28} \times 0,94$

Le point de vitesse minimum est au delà du point de chute.

Troisième trajectoire : $V_o = 600$, $\alpha = 20^\circ$

	v	τ	J
origine	600	20°	$\frac{1}{60} \times 0,94$
sommet	268	0	$\frac{1}{27}$
point de chute	240	-30°	$\frac{1}{24} \times 0,87$

Le minimum de v est voisin de 239, et il correspond à peu près à -26° .

Quatrième trajectoire : $V_o = 609,6$, $\alpha = 30^\circ$

	v	τ	J
origine	609,6	30°	$\frac{1}{61} \times 0,87$
sommet	234	0	$\frac{1}{23}$
point de chute	224	-44°	$\frac{1}{22} \times 0,72$

Le minimum de la vitesse est voisin de 213 mètres par seconde, et il correspond à peu près à une inclinaison de -27° .

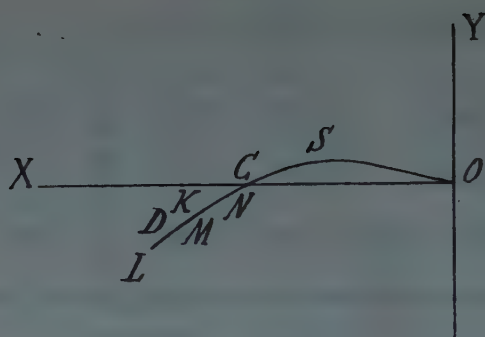


FIG. 2.

Représentons la trajectoire par la figure 2. L'origine est O, le sommet est S, le point de chute est C. Le minimum de v correspond au point D, et ce point D est au delà du point C, dans les deux premières trajectoires. Il est situé entre S et C, dans les deux dernières trajectoires. Le minimum de P correspond au point K, qui est voisin de D. Le maximum de J correspond au point N, qui est situé avant le point D, sur la trajectoire. Le minimum de Q, fonction de Mayevski, correspond au point M.

Le point M se trouve, en général, entre N et K. En général, les points D, N, M remontent vers le sommet S, lorsque l'angle de tir α croît.

Pour faire une discussion rapide, je prendrai successivement :

$$\omega = 100, \quad \text{et} \quad \omega = 200.$$

Premier cas : $\omega = 100$.

Considérons les trois points fondamentaux, O, S, C. Nous avons les valeurs ci-dessous de ωJ :

Première trajectoire	$\frac{98}{52}$	$\frac{100}{32}$	$\frac{95}{27}$,
Deuxième trajectoire	$\frac{98}{85}$	$\frac{100}{36}$	$\frac{94}{28}$,
Troisième trajectoire	$\frac{94}{60}$	$\frac{100}{27}$	$\frac{87}{24}$,
Quatrième trajectoire	$\frac{87}{61}$	$\frac{100}{23}$	$\frac{72}{22}$.

Si la trajectoire est prolongée, un peu au delà du point de chute, la valeur de ωJ ne varie pas beaucoup, parce que la valeur de v ne varie pas beaucoup, et parce que j'ai supposé la valeur de τ limitée.

Si l'on a, par exemple :

$$|\tau| < 45^\circ,$$

il en résulte que l'on a, entre les points S et L :

$$1 > \cos \tau > 0,71 .$$

Nous avons donc : $\omega J > 1$, sur toute la trajectoire, de O à L, et ωJ peut être de l'ordre de 3, ou de 4.

Second cas : $\omega = 200$.

Il suffit de doubler tous les nombres précédents. Nous avons donc : $\omega J > 2$, sur toute la trajectoire, de O à L, et ωJ peut être de l'ordre de 6, ou de 8.

Après avoir obtenu ces indications moyennes, nous pouvons donner la base d'une discussion générale.

Nous avons :

$$(35) \quad \omega J = v \frac{2}{a} j g \frac{V_o}{v} \cos \tau .$$

Prenons les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} j & \text{ compris entre } 0,07 \text{ et } 0,14 , \\ a & \text{ compris entre } 0,070 \text{ et } 0,105 , \\ \frac{2}{a} j & \text{ compris entre } \frac{4}{3} \text{ et } 4 , \\ v g & \text{ compris entre } 1 \text{ et } 2 , \\ \alpha & \text{ compris entre } 5^\circ \text{ et } 25^\circ , \\ \cos \alpha & \text{ compris entre } 0,996 \text{ et } 0,906 . \end{aligned}$$

A l'origine, nous avons : $\frac{V_o}{v} = 1$.

Par suite, ωJ sera compris entre $\frac{4}{3} \cos \alpha$ et $8 \cos \alpha$.

Considérons maintenant la trajectoire, un peu prolongée, comme je l'ai dit.

Le rapport $\frac{V_o}{v}$ pourra varier entre 1 et 3, par exemple, ou bien entre 1 et 4.

Sur la branche descendante, qui est limitée, $\cos \tau$ varie peu ; par exemple $\cos \tau$ varie de 1 à 0,71. Au contraire, sur la branche descendante limitée, le rapport $\frac{V_o}{v}$ est nettement supérieur à 1, et peut avoir la valeur 3 ou 4, par exemple.

Nous aurons donc, sur la branche descendante limitée, des valeurs de ωJ nettement supérieures à la valeur initiale de ωJ sur la même trajectoire.

(A suivre.)

FONCTIONS ASSOCIÉES AUX FONCTIONS DE RIEMANN
D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE —
APPLICATION A L'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS LINÉAIRES
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

(2^{de} note)

par M. R. H. J. GERMAÏ (1)

§ 1. Le système différentiel caractéristique de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, de forme linéaire et homogène

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + f_1(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial z}{\partial y_1} + \dots + f_n(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial z}{\partial y_n} = 0,$$

s'écrit

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), & \frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{dp_i}{dx} = -p_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} - \dots - p_n \frac{\partial f_n}{\partial y_i}, & (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

En fait, il suffit d'intégrer les n premières équations (2) pour trouver l'intégrale générale de l'équation (1), la $(n + 1)^{\text{e}}$ équation (2) donnant immédiatement $z = z_0$. Les n dernières équations (2) fournissent néanmoins pour les dérivées partielles de z par rapport à y_1, \dots, y_n des expressions signalées dans une note récente (2).

§ 2. Ces expressions se simplifient quand les f_i sont de la forme

$$(3) \quad f_i = a_{i1}(x) y_1 + a_{i2}(x) y_2 + \dots + a_{in}(x) y_n + a_i(x), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Le système différentiel formé par les n dernières équations (2) est actuellement

$$(4) \quad \frac{dp_i}{dx} = -a_{1i}(x) p_1 - a_{2i}(x) p_2 - \dots - a_{ni}(x) p_n, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Désignons par p_1^0, \dots, p_n^0 les valeurs initiales de leurs solutions en $x = x_0$. Les formules

$$(5) \quad p_i = p_i^0 + \pi_i, \quad (i = 1, \dots, n),$$

transforment le système (4) en le suivant :

$$(6) \quad \frac{d\pi_i}{dx} = -a_{1i}(x) \pi_1 - a_{2i}(x) \pi_2 - \dots - a_{ni}(x) \pi_n - \alpha_i(x), \quad (i = 1, \dots, n).$$

(1) Voir la 1^{re} note dans ces *Annales*, série I, t. 58, 1938, pp. 162-165.

(2) *Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liège*, 1939, t. 8, p. 8-12.

Nous avons posé, pour abrégér,

$$(7) \quad \alpha_i(x) = p_1^o a_{1i}(x) + \dots + p_n^o a_{ni}(x), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Représentons par

$$(8) \quad \begin{cases} G_{1,1}^*(x, \xi; \lambda), & \dots & G_{1,n}^*(x, \xi; \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n,1}^*(x, \xi; \lambda), & \dots & G_{n,n}^*(x, \xi; \lambda) \end{cases}$$

les fonctions de Riemann associées au système (6). Nous savons que

$$(9) \quad G_{j,1}^*(x, \xi; \lambda) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \lambda^k g_{j,1}^{*(k)}(x, \xi), \dots, G_{j,n}^*(x, \xi; \lambda) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \lambda^k g_{j,n}^{*(k)}(x, \xi),$$

$$(j = 1, \dots, n).$$

Les coefficients de ces séries se déterminent de proche en proche par les formules récurrentes

$$(10) \quad \begin{cases} g_{j,1}^{*(p+1)}(x, \xi) = - \int_{\xi}^x \left[\alpha_{1j}(t) g_{1,1}^{*(p)}(t, \xi) + \dots + \alpha_{nj}(t) g_{n,1}^{*(p)}(t, \xi) \right] dt, \\ \dots \\ g_{j,n}^{*(p+1)}(x, \xi) = - \int_{\xi}^x \left[\alpha_{1j}(t) g_{1,n}^{*(p)}(t, \xi) + \dots + \alpha_{nj}(t) g_{n,n}^{*(p)}(t, \xi) \right] dt, \end{cases}$$

moeynnant les valeurs initiales

$$(11) \quad \begin{cases} g_{1,1}^{*(o)} = 1, & g_{1,2}^{*(o)} = 0, & \dots & g_{1,n}^{*(o)} = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n,1}^{*(o)} = 0, & g_{n,2}^{*(o)} = 0, & \dots & g_{n,n}^{*(o)} = 1. \end{cases}$$

Les fonctions de Riemann (8) donnent d'ailleurs lieu aux relations

$$(12) \quad \begin{cases} G_{1,1}^*(\xi, \xi; \lambda) = 1, & G_{1,2}^*(\xi, \xi; \lambda) = 0, & \dots, & G_{1,n}^*(\xi, \xi; \lambda) = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n,1}^*(\xi, \xi; \lambda) = 0, & G_{n,2}^*(\xi, \xi; \lambda) = 0, & \dots, & G_{n,n}^*(\xi, \xi; \lambda) = 1. \end{cases}$$

Les fonctions $\pi_j(x)$, intégrales des équations différentielles (6) prenant en $x = x_o$ la valeur zéro, sont données par les formules

$$(13) \quad \pi_j(x) = \int_{x_o}^x \left[\alpha_1(\xi) G_{j,1}^*(x, \xi; 1) + \dots + \alpha_n(\xi) G_{j,n}^*(x, \xi; 1) \right] d\xi, \quad (j=1, \dots, n).$$

Tenant compte des valeurs (7) des $\alpha_i(x)$ et des formules (5) elles-mêmes, il vient :

$$(14) \quad \begin{cases} p_1 = p_1^o [1 + H_{1,1}^*(x, x_o)] + p_2^o H_{1,2}^*(x, x_o) + \dots + p_n^o H_{1,n}^*(x, x_o), \\ \dots \\ p_n = p_1^o H_{n,1}^*(x, x_o) + p_2^o H_{n,2}^*(x, x_o) + \dots + p_n^o [1 + H_{n,n}^*(x, x_o)], \end{cases}$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$(29) \begin{cases} G_{1,1}^*(\xi, \xi; \lambda) = 1, & G_{2,1}^*(\xi, \xi; \lambda) = 0, & \dots & G_{n,1}^*(\xi, \xi; \lambda) = 0, \\ G_{1,2}^*(\xi, \xi; \lambda) = 0, & G_{2,2}^*(\xi, \xi; \lambda) = 1, & \dots & G_{n,2}^*(\xi, \xi; \lambda) = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{1,n}^*(\xi, \xi; \lambda) = 0, & G_{2,n}^*(\xi, \xi; \lambda) = 0, & \dots & G_{n,n}^*(\xi, \xi; \lambda) = 1. \end{cases}$$

Les systèmes différentiels homogènes (26) et (28) sont réciproquement adjoints. Entre un système d'intégrales y_1, \dots, y_n du premier et un système z_1, \dots, z_n d'intégrales du second, on a la relation

$$(30) \quad y_1 z_1 + y_2 z_2 + \dots + y_n z_n = \text{cte}.$$

Les formules (27) et (29) montrent alors que les fonctions G_{jk}^* , par exemple, sont liées aux fonctions G_{jk} par les relations simples

$$(31_1) \quad \begin{cases} G_{1,1} G_{1,1}^* + G_{2,1} G_{2,1}^* + \dots + G_{n,1} G_{n,1}^* = 1, \\ G_{1,2} G_{1,1}^* + G_{2,2} G_{2,1}^* + \dots + G_{n,2} G_{n,1}^* = 0, \\ \dots \\ G_{1,n} G_{1,1}^* + G_{2,n} G_{2,1}^* + \dots + G_{n,n} G_{n,1}^* = 0; \\ \dots \end{cases}$$

$$(31_n) \quad \begin{cases} G_{1,1} G_{1,n}^* + G_{2,1} G_{2,n}^* + \dots + G_{n,1} G_{n,n}^* = 0, \\ \dots \\ G_{1,n-1} G_{1,n}^* + G_{2,n-1} G_{2,n}^* + \dots + G_{n,n-1} G_{n,n}^* = 0, \\ G_{1,n} G_{1,n}^* + G_{2,n} G_{2,n}^* + \dots + G_{n,n} G_{n,n}^* = 1. \end{cases}$$

Ces formules permettent d'exprimer très simplement les $G_{j,k}^*$ en fonction des $G_{j,k}$ et réciproquement. Remarquons aussi que les expressions telles que, par exemple,

$$a_{1,1} G_{1,1}^* + \dots + a_{1,n} G_{1,n}^*$$

intervenant sous les signes d'intégration dans les formules (14), s'écrivent

$$(32) \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & G_{2,1} & \dots & G_{n,1} \\ a_{1,2} & G_{2,2} & \dots & G_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & G_{2,n} & \dots & G_{n,n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & \dots & G_{n,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & \dots & G_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{1,n} & G_{2,n} & \dots & G_{n,n} \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

§ 6. Considérons encore l'équation aux dérivées partielles

$$(33) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + f_1(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial z}{\partial y_1} + \dots + f_n(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial z}{\partial y_n} = f_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n).$$

La Géométrie des Sous-espaces

PAR

le R. P. F. GOREUX, S. J.

REMARQUE PRÉLIMINAIRE ⁽¹⁾

Dans cet article, les indices grecs varient de 1 à m , les indices latins minuscules de 1 à n ($n < m$), et les indices latins majuscules, de $(n + 1)$ à m . Ainsi, lorsqu'il s'agit d'indices :

$$\begin{aligned}\alpha, \beta, \dots &= 1, 2, \dots, m \\ a, b, \dots &= 1, 2, \dots, n \quad (n < m) \\ P, Q, \dots &= (n + 1), (n + 2), \dots, m.\end{aligned}\tag{1}$$

En accord avec ces notations, lorsque parmi m composantes A_α , nous voudrions distinguer celles où l'indice α prend les valeurs de 1 à n et celles où cet indice prend les valeurs supérieures à n , nous distinguerons les A et les A_P .

Nous ferons aussi la convention sommatoire. C'est-à-dire que lorsqu'un même indice — α , a ou P — interviendra deux fois dans un terme de nos formules, ce terme sera supposé précédé du signe $\sum_{\alpha=1}^m$, $\sum_{a=1}^n$ ou $\sum_{P=n+1}^m$.

§ 1. — LES FORMULES DE WEINGARTEN-GAUSS ET DE GAUSS-CODAZZI ⁽²⁾

1° Les normales.

Soit un espace ponctuel de Riemann V_m , de forme fondamentale définie positive :

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta\tag{2}$$

⁽¹⁾ Recherches du séminaire de mathématiques de l'Université de Louvain, Directeur, Professeur F. Simonart.

⁽²⁾ Cfr. L. PF. EISENHART : Riemannian Geometry. Princeton University Press. 1926.

et un sous-espace V_n défini par les relations :

$$y^\alpha = \lambda^\alpha(x^i). \quad (3)$$

Les fonctions λ^α seront supposées dérivables jusqu'au troisième ordre. Nous supposerons d'ailleurs, dans cette étude, que toutes les fonctions considérées soient dérivables jusqu'à l'ordre nécessaire à la légitimité de nos opérations.

Nous poserons :

$$\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x^i} = \lambda_i^\alpha \quad \frac{\partial^2 \lambda^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} = \lambda_{ij}^\alpha \quad \frac{\partial^3 \lambda^\alpha}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} = \lambda_{ijk}^\alpha. \quad (4)$$

On aura, pour un déplacement dans V_n ,

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = a_{\alpha\beta} \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \quad (5)$$

en posant :

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta} \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta. \quad (6)$$

Nous postulons que les déterminants $|a_{\alpha\beta}|$ et $|g_{ij}|$ ne soient pas nuls aux points considérés.

On peut alors trouver (cfr Eisenhart, n° 42), en chacun des points de V_n , des systèmes de $(m-n)$ vecteurs unitaires indépendants normaux à V_n et orthogonaux entre eux. Considérons un tel système et soient $\lambda_P^\alpha(x^i)$ les composantes de la normale de rang P .

Nous nous étions déjà servi du symbole λ dans les formules (4). Mais aucune ambiguïté n'est à craindre puisque les nouvelles fonctions λ_P^α sont caractérisées par un indice inférieur P qui ne prend que des valeurs supérieures à n , tandis que, dans les λ_i^α , l'indice i varie de 1 à n . Et d'autre part, le choix du même symbole λ simplifiera nos écritures, car, au lieu de parler des λ_i^α et des λ_P^α , il nous suffira de parler des λ_β^α .

On aura :

$$a_{\alpha\beta} \lambda_i^\alpha \lambda_P^\beta = 0 \quad a_{\alpha\beta} \lambda_P^\alpha \lambda_Q^\beta = \delta_{PQ} \quad (7)$$

où $\delta_{PQ} = \begin{cases} 1 & \text{si } P = Q \\ 0 & \text{si } P \neq Q \end{cases}$

Nous définirons des grandeurs g_{iP} , g_{Pi} , g_{PQ} , g^{iP} , g^{Pi} , g^{PQ} par les relations :

$$g_{iP} = g_{Pi} = g^{iP} = g^{Pi} = 0 \quad g_{PQ} = g^{PQ} = \delta_{PQ} \quad (8)$$

Avec ces conventions, les relations (6) et (7) se résument en :

$$a_{\alpha\beta} \lambda_\mu^\alpha \lambda_\nu^\beta = g_{\mu\nu}. \quad (9)$$

2° Une transformation de coordonnées de V_m .

Associons aux n variables indépendantes x^i , $(m-n)$ nouvelles variables indépendantes x^p , de façon à concevoir m variables indépendantes x^a .

Écrivons la transformation :

$$y^a = \lambda^a(x^i) + \lambda^a_p(x^i) x^p. \quad (10)$$

Nous poserons :

$$\frac{\partial \lambda^a_p}{\partial x^i} = \lambda^a_{pi}. \quad (11)$$

On aura :

$$\frac{\partial y^a}{\partial x^i} = \lambda^a_i + \lambda^a_{pi} x^p \quad \text{et} \quad \frac{\partial y^a}{\partial x^p} = \lambda^a_p(x^i). \quad (12)$$

Si l'on pose $x^p = 0$, on retrouve les formules qui définissent V_n . Considérons un point M de V_n . En ce point, le déterminant de la transformation (10) se réduit au déterminant Δ des λ^a_i . Or celui-ci n'est pas nul.

Car :

$$\left| \lambda^a_i \right| \left| a_{\mu\nu} \lambda^\mu_i \lambda^\nu_j \right| = \left| a_{\mu\nu} \lambda^\mu_i \lambda^\nu_j \right| = \left| g_{ij} \right| = \left| g_{ij} \right| \neq 0. \quad (13)$$

Donnons aux valeurs des x^a qui définissent M des accroissements dx^a infiniment petits, et considérons ainsi le voisinage du point M . Puisque, en M , les x^p sont nuls, au voisinage de M , les x^p seront aussi petits que l'on veut. Mais alors, en ces points, le déterminant de la transformation (10) ne diffère de la valeur qu'y prend Δ , que d'un polynôme en x^p . On peut donc supposer les x^p suffisamment petits pour que le déterminant de la transformation (10) ne soit pas nul.

Cette transformation établit donc une correspondance biunivoque entre les x^a et les y^a . Et nous pourrions rapporter V_m aux nouvelles coordonnées x^a .

Soit alors $ds^2 = \bar{a}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, la forme que prend le ds^2 de V_m .

Nous désignerons par Γ_{ijk} , $C_{\alpha\beta\gamma}$, $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma}$, les symboles de Christoffel formés respectivement à l'aide des g_{ij} , des $a_{\alpha\beta}$ et des $\bar{a}_{\alpha\beta}$.

Les tenseurs de Riemann correspondants seront désignés par ρ_{ijkl} , $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

3° Les formules de Weingarten-Gauss.

On se rappelle ⁽¹⁾ les conditions qui relient les $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma}$ aux $C_{\alpha\beta\gamma}$.

$$\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \bar{C}_{\mu\nu}^\sigma \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma} - C_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu} \quad (14)$$

En particulier, aux points de V_n ($x^p = 0$), on trouvera :

$$\lambda_{\mu i}^\alpha = \bar{C}_{\mu i}^\sigma \lambda_\sigma^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha \lambda_\mu^\beta \lambda_i^\gamma. \quad (15)$$

On appellera les formules (15) *les formules de Weingarten-Gauss généralisées*. Car dans le cas ordinaire d'une surface (V_2) plongée dans un espace euclidien à 3 dimensions (V_3), rapporté à des axes cartésiens rectangulaires, les formules (15) se réduisent aux formules de Weingarten-Gauss.

Soient en effet, X, Y, Z , les coordonnées courantes de V_3 et u, v celles de V_2 .

Appelons A, B, C , les cosinus directeurs de la normale à V_2 .

Désignons par des indices inférieurs les dérivations par rapport à u et v .

Les formules de Weingarten-Gauss donnent les dérivées secondes X_{uv} , X_{vv} (Y, Z) et les dérivées premières A_u, A_v (B, C) en fonction des X_u, X_v, A (Y, Z, B, C).

Or dans ce cas, les λ_i^α deviennent les X_u, X_v (Y, Z) et les λ_p^α deviennent A (B, C). Et les relations (15) en donnent bien les dérivées sous la forme cherchée.

On remarquera, dans ce cas, que les $C_{\alpha\beta}^\gamma$ sont nuls (puisque l'espace est euclidien et les coordonnées cartésiennes). Si les coordonnées étaient curvilignes, les expressions obtenues ne seraient plus linéaires en X_u, X_v, A (Y, Z, B, C) mais elles contiendraient aussi des termes du second degré.

4° Les formules de Gauss-Codazzi.

On se rappelle que la recherche des conditions d'intégrabilité des formules (14) conduit aux relations ⁽²⁾ :

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\delta} R_{\mu\nu\sigma\rho}. \quad (16)$$

Puisque les relations (15) sont contenues dans les relations (14), la recherche de leurs conditions d'intégrabilité n'est pas un problème distinct

⁽¹⁾ Cf. EISENHART (8. 1).

⁽²⁾ Cf. EISENHART (8. 6).

du précédent. On se rend compte aisément qu'il conduit aux relations :

$$\bar{R}_{\alpha\beta ij} = \lambda_{\alpha}^{\mu} \lambda_{\beta}^{\nu} \lambda_i^{\sigma} \lambda_j^{\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho}. \quad (17)$$

Ces relations sont contenues dans (16). On les obtient en considérant ce que deviennent les relations (16) aux points de V_n et en se bornant aux composantes $\bar{R}_{\alpha\beta ij}$ où les deux derniers indices varient de 1 à n .

Puisque les relations (15) généralisent les formules de Weingarten-Gauss, et que les relations (17) en sont les conditions d'intégrabilité, ces dernières généralisent les formules de Gauss-Codazzi.

On voit donc que les formules de Weingarten-Gauss et de Gauss-Codazzi généralisées sont contenues dans les relations auxquelles conduit l'étude de la déformation de V_n .

5° Remarques complémentaires.

En vue des applications et aussi pour retrouver des formules connues, regardons de plus près ce que deviennent les $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma}$ aux points de V_n .

A la suite de la transformation (10), le ds^2 de V_m prend la forme :

$$ds^2 = (g_{ij} + 2\alpha_{\alpha\beta} \lambda_i^{\alpha} \lambda_j^{\beta} x^p + \alpha_{\alpha\beta} \lambda_{ri}^{\alpha} \lambda_{qj}^{\beta} x^p x^q) dx^i dx^j \\ + 2\alpha_{\alpha\beta} \lambda_r^{\alpha} \lambda_{qi}^{\beta} x^q dx^i dx^p + \delta_{pq} dx^p dx^q = \bar{a}_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (18)$$

Aux points de V_n , on trouve :

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \bar{a}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}. \quad (19)$$

Si nous dérivons les $\bar{a}_{\alpha\beta}$ et que nous prenions les valeurs de ces dérivées aux points de V_n , on voit que, dans ce calcul, on peut négliger, dans les $\alpha_{\alpha\beta}$, les termes qui contiennent x^p en facteur (puisqu'ils sont nuls aux points de V_n). On aura, par suite :

$$\Gamma_{ijk} = \bar{C}_{ijk}. \quad (20)$$

D'autre part, on connaît les relations ⁽¹⁾ :

$$\bar{C}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\gamma}} a_{\mu\nu} + \frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \cdot \frac{\partial y^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} C_{\mu\nu\sigma} \quad (21)$$

qui ne sont qu'une autre forme des relations (16).

Or, aux points de V_n , les relations (12) permettent d'écrire :

$$\frac{\partial^2 y^{\alpha}}{\partial x^i \partial x^j} = \lambda_{ij}^{\alpha} + \lambda_{rij}^{\alpha} x^p \quad \frac{\partial^2 y^{\alpha}}{\partial x^i \partial x^q} = \lambda_{qi}^{\alpha} \quad \frac{\partial^2 y^{\alpha}}{\partial x^q \partial x^r} = 0. \quad (22)$$

(1) Cf. EISENHART (7, 12).

Par suite, en ces points, les relations (21) nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\bar{C}_{ijk} &= a_{\alpha\beta} \lambda_k^\alpha \lambda_{ij}^\beta + \lambda_i^\mu \lambda_j^\nu \lambda_k^\sigma C_{\mu\nu\sigma} \\ \bar{C}_{ijp} &= a_{\alpha\beta} \lambda_p^\alpha \lambda_{ij}^\beta + \lambda_i^\mu \lambda_j^\nu \lambda_p^\sigma C_{\mu\nu\sigma} \\ \bar{C}_{rij} &= a_{\alpha\beta} \lambda_j^\alpha \lambda_{ri}^\beta + \lambda_r^\mu \lambda_i^\nu \lambda_j^\sigma C_{\mu\nu\sigma} \\ \bar{C}_{riq} &= a_{\alpha\beta} \lambda_q^\alpha \lambda_{ri}^\beta + \lambda_r^\mu \lambda_i^\nu \lambda_q^\sigma C_{\mu\nu\sigma}\end{aligned}\quad (23)$$

D'autre part :

$$\bar{C}_{ijp} + \bar{C}_{rji} = \frac{\partial \bar{a}_{rj}}{\partial x^i} = 0, \quad \text{et} \quad \bar{C}_{riq} + \bar{C}_{qir} = \frac{\partial \bar{a}_{ri}}{\partial x^q} = 0.$$

On verra aisément que dans le cas ordinaire d'un V_2 plongé dans un V_3 euclidien rapporté à des axes rectangulaires, les \bar{C}_{ijp} se réduisent aux coefficients de la seconde forme fondamentale et les \bar{C}_{riq} sont tous nuls.

Dans les expressions (22), nous avons négligé les termes qui contiennent les x^p en facteur, puisque ceux-ci sont nuls sur V_n . Si on cherche les dérivées des $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma}$ par rapport aux x^i , il n'y aura pas lieu de tenir compte de ces termes sur V_n , puisque, après dérivation, ils seront encore en facteurs. Or, dans le calcul des composantes de $\bar{R}_{\alpha\beta ij}$, les seules dérivations se font par rapport aux x^i et donc, dans ce calcul, on peut considérer les $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma}$ comme définis par les relations (23).

§ 2. — LA TRANSFORMATION T ⁽¹⁾

6° Définition.

Considérons m grandeurs X^α et définissons m autres grandeurs l_α par les relations :

$$a_{\alpha\beta} \lambda_\gamma^\alpha X^\beta = l_\gamma. \quad (24)$$

Le déterminant $|a_{\alpha\beta} \lambda_\gamma^\alpha|$ de cette transformation n'est pas nul en vertu de (13).

Nous appellerons cette transformation *la transformation T*. On vérifie que ses solutions s'écrivent :

$$X^\alpha = g^{\mu\nu} \lambda_\mu^\alpha l_\nu. \quad (25)$$

Nous dirons qu'on obtient les X^α en « appliquant » la transformation T aux l_α .

(¹) Cfr. F. SIMONART, Sur le rôle des opérateurs généralisés de Beltrami. *Bull. Ac. Roy. Belg. Cl. d. Sc.*, XIX, 1933.

F. GOREUX, Étude des surfaces et des congruences de droites par la méthode cinématique. *Ann. Soc. scient. Brux.*, t. LIV, A, 1934.

EXEMPLE. — On peut évidemment écrire :

$$a_{\alpha\beta} \lambda_{\mu}^{\alpha} a^{\beta\tau} = \lambda_{\mu}^{\tau}. \quad (26)$$

Ces relations forment, pour chaque valeur de τ , une transformation T , d'où l'on déduit :

$$a^{\beta\tau} = g^{\mu\nu} \lambda_{\mu}^{\beta} \lambda_{\nu}^{\tau}. \quad (27)$$

REMARQUE. — Supposons que les X^{α} soient les composantes d'un tenseur de V_m . On voit que les l_{α} forment les produits scalaires du vecteur X^{α} et des vecteurs λ_{β}^{α} . La transformation T revient donc à décomposer le vecteur X^{α} en ses projections orthogonales sur les arêtes de l'ennuple λ_{β}^{α} , les grandeurs des λ_{β}^{α} étant prises respectivement pour unités de longueur.

7° Les dérivées premières des X^{α} .

Supposons que les X^{α} soient des fonctions des x^i . Nous nous proposons d'exprimer leurs dérivées par rapport aux x^i en fonction de celles des l_{α} .

Nous poserons :

$$\frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^i} = X_i^{\beta} \quad \frac{\partial l_{\tau}}{\partial x^i} = l_{\tau i}. \quad (28)$$

Dérivons l'équation (24) par rapport à x^i . En tenant compte de (15), (27), et de

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\delta}} = C_{\alpha\delta\beta} + C_{\beta\delta\alpha}, \quad (29)$$

il vient :

$$a_{\alpha\beta} \lambda_{\tau}^{\alpha} X_i^{\beta} = l_{\tau i} - \bar{C}_{\tau i}^{\nu} l_{\nu} - g^{\alpha\beta} C_{\mu\nu\rho} \lambda_{\tau}^{\rho} \lambda_i^{\nu} \lambda_{\alpha}^{\mu} l_{\beta}. \quad (30)$$

Nous désignerons les seconds membres par $l_{(\tau i)}$, en posant :

$$l_{(\tau i)} = l_{\tau i} - \bar{C}_{\tau i}^{\beta} l_{\beta} - g^{\alpha\beta} C_{\mu\nu\rho} \lambda_{\tau}^{\rho} \lambda_i^{\nu} \lambda_{\alpha}^{\mu} l_{\beta}. \quad (31)$$

Si l'on voulait simplifier l'écriture de ces relations, on pourrait poser :

$$D_{\tau i}^{\beta} = g^{\beta\alpha} C_{\mu\nu\rho} \lambda_{\tau}^{\rho} \lambda_i^{\nu} \lambda_{\alpha}^{\mu} + \bar{C}_{\tau i}^{\beta} \quad (32)$$

et l'on aurait :

$$l_{(\tau i)} = l_{\tau i} - D_{\tau i}^{\beta} l_{\beta}. \quad (33)$$

Ces expressions rappellent la dérivée covariante.

Les relations (30) s'écriront :

$$a_{\alpha\beta} \lambda_{\tau}^{\alpha} X_i^{\beta} = l_{(\tau i)}. \quad (34)$$

Ce qui forme une transformation T d'où l'on déduit les X_i^α .

Les relations (33) permettent de calculer les $l_{(\gamma i)}$ en fonction des l_γ . Nous dirons qu'elles forment une transformation T_i et qu'on obtient les $l_{(\gamma i)}$ en « appliquant » T_i aux l_γ .

On pourra dire alors qu'on obtient les X_i^α en appliquant aux l_γ le produit TT_i . (On remarquera que T_i doit s'appliquer en premier lieu.)

Nous écrirons symboliquement :

$$(X_i^\alpha) = TT_i(l_\gamma). \quad (35)$$

8° Les dérivées ultérieures des X^α .

Si l'on voulait calculer les X_{ij} , on aboutirait, par un calcul analogue, aux relations :

$$\alpha_{\alpha\beta} \lambda_\gamma^\alpha X_{ij}^\beta = l_{(\gamma ij)} \quad (36)$$

dans lesquelles les $l_{(\gamma ij)}$ sont ceux que définissent les relations :

$$l_{(\gamma ij)} = l_{(\gamma i)j} - D_{\gamma j}^\beta l_{(\beta i)}. \quad (37)$$

Ces relations déduisent les $l_{(\gamma ij)}$ des $l_{(\gamma i)}$ comme les relations (33) déduisaient ceux-ci des l_γ .

Nous dirons donc que les X_{ij}^α s'obtiennent en appliquant aux l_γ le produit $TT_j T_i$.

D'une façon générale, on trouvera, pour des dérivées d'ordre quelconque

$$(X_{ij...pq}^\alpha) = TT_q T_p \dots T_j T_i(l_\gamma). \quad (38)$$

9° Conditions d'intégrabilité.

On ne peut pas se donner arbitrairement les $l_{(\gamma i)}$. Mais ceux-ci doivent vérifier certaines conditions d'intégrabilité. Celles-ci reviennent évidemment à

$$l_{(\gamma ij)} = l_{(\gamma ji)} \quad (39)$$

ou, explicitement,

$$l_{(\gamma i)j} - l_{(\gamma j)i} = -D_{\gamma j}^\beta l_{(\beta i)} + D_{\gamma i}^\beta l_{(\beta j)} \quad (40)$$

ce qui nous donne $\frac{1}{2} mn(n-1)$ équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Utilisations de ces relations dans la résolution des problèmes.

Il peut se faire que les relations qui traduisent les hypothèses de certains problèmes soient des relations entre les $l_{(\gamma i)}$. Deux méthodes se présentent alors à l'esprit :

a) ou bien, on joindra les équations (39) aux relations du problème et l'on cherchera à résoudre l'ensemble des équations ainsi obtenues ;

b) ou bien, dans les relations du problème, on substituera aux $l_{(\gamma i)}$ leurs expressions tirées de (33). Il n'y aura plus alors à considérer de conditions d'intégrabilité. Cette seconde méthode peut être beaucoup plus simple que la première.

10° Exemple.

Les formules précédentes permettent une généralisation immédiate de nombreux problèmes de Géométrie différentielle ordinaire. Nous allons en donner un exemple :

La déformation infiniment petite des V_n .

Soit encore le V_n considéré plus haut. Si l'on cherche un V'_n , lieu des points $(y^\alpha + X^\alpha)$ tel que les éléments linéaires de V_n et de V'_n soient égaux, aux points correspondants, on trouve, en négligeant les termes du second ordre en (dX^α) la relation de condition :

$$a_{\alpha\beta} dX^\alpha dy^\beta = 0. \quad (41)$$

Résoudre cette équation sera résoudre le problème de la déformation infiniment petite de V_n ⁽¹⁾. L'équation (41) s'écrit :

$$a_{\alpha\beta} X_i^\alpha y_j^\beta dx^i dx^j = 0, \quad (42)$$

il vient à résoudre

$$a_{\alpha\beta} y_i^\alpha X_j^\beta + a_{\alpha\beta} y_j^\alpha X_i^\beta = 0, \quad (43)$$

c'est-à-dire

$$l_{(ij)} + l_{(ji)} = 0. \quad (44)$$

Première méthode : On joindra aux équations (44) les relations (39). On considère les $l_{(ij)}$ comme inconnues dans ce système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Seconde méthode : On exprime dans (44) les $l_{(ij)}$ en fonction des l_γ , et l'on obtient les conditions souvent plus simples :

$$\frac{\partial l_i}{\partial x^j} + \frac{\partial l_j}{\partial x^i} = (D_{ij}^\beta + D_{ji}^\beta) l_\beta. \quad (45)$$

De la même façon, on généralisera très aisément les résultats exposés dans les deux mémoires cités plus haut (cfr. n° 6).

(1) Cfr. DARBOUX, t. IV.

Contribution à l'étude de l'univalence locale des fonctions holomorphes ⁽¹⁾

PAR

ROBERT BALLIEU

Aspirant du Fonds national belge de la Recherche scientifique

INTRODUCTION

Dans un article récent, M. Montel a introduit la notion d'univalence locale pour les fonctions holomorphes. Se limitant à la considération du cercle-unité du plan de la variable complexe, M. Montel dit qu'une fonction, holomorphe dans ce domaine, y est localement univalente de module ρ si elle est univalente dans tout cercle de rayon ρ intérieur à ce domaine.

Si au lieu de considérer le cercle-unité, on considère un domaine fini quelconque, on voit qu'en adoptant telle quelle la définition de M. Montel de l'univalence locale de module ρ , les valeurs de la fonction en certaines parties du domaine ne joueraient pas, au point de vue de cette notion, de rôle immédiat, car, étant donné un nombre fixe ρ , tout point d'un domaine arbitraire n'appartient pas nécessairement à un cercle de rayon ρ intérieur au domaine.

Pour définir l'univalence locale de module ρ d'une fonction holomorphe dans un domaine fini, je suis donc conduit, dans le premier chapitre de la présente dissertation, à remplacer dans la définition précédente la condition d'univalence dans tout cercle de rayon ρ intérieur au domaine par la condition d'univalence dans tout cercle intérieur au domaine et de rayon non supérieur à ρ .

D'après cette définition, une fonction holomorphe et localement univalente de module ρ dans un domaine, y est aussi localement univalente de module ρ' pour toute valeur positive et inférieure à ρ du module ρ' ; cette propriété, dans le cas traité par M. Montel, résultait du fait que tout

(1) Travaux du Séminaire de mathématiques de l'Université de Louvain sous la direction de M. Fernand Simonart.

cercle de rayon ρ' inférieur à ρ , ($\rho \leq 1$), intérieur au cercle-unité est aussi intérieur à un cercle de rayon ρ intérieur au cercle-unité.

Une condition nécessaire d'univalence locale dans un domaine D pour une fonction $f(z)$ holomorphe dans D , est que la dérivée $f'(z)$ ne s'annule pas dans ce domaine. Cette condition n'est pas suffisante, mais elle est nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(z)$ soit localement univalente à l'intérieur de D , c'est-à-dire localement univalente de module fini dans tout domaine D' complètement intérieur à D .

L'univalence locale de module ρ dans un domaine fini D pour les fonctions d'une suite uniformément convergente à l'intérieur de D de fonctions holomorphes dans D se transmet à la fonction limite $f(z)$, à moins que celle-ci ne soit constante. Il en est de même pour l'univalence locale à l'intérieur d'un domaine. On peut établir des réciproques de ces propositions. En ce qui concerne la première, il faut pour cela supposer davantage sur l'univalence de la fonction limite $f(z)$ dans les cercles intérieurs au domaine ; de façon précise, il faut supposer, dans le cas où le domaine D renferme au moins un cercle de rayon ρ complètement intérieur, que la fonction limite $f(z)$ est, de plus, univalente dans tout pareil cercle fermé. Lorsque cette hypothèse est réalisée, je dirai que la fonction $f(z)$ est localement univalente de module ρ au sens strict dans D . Il est à remarquer que les deux notions d'univalence locale de module ρ et d'univalence locale de module ρ au sens strict ne se confondent pas.

Soient alors D un domaine fini renfermant au moins un cercle de rayon ρ , D' , un domaine quelconque complètement intérieur à D , ρ' , le plus petit des deux nombres ρ et ρ' , où ρ' désigne le rayon du plus grand cercle intérieur à D' . J'établis, avec ces notations, le théorème : Si la fonction $f(z)$ est holomorphe et localement univalente de module ρ au sens strict dans D , dans toute suite de fonctions holomorphes dans D et convergeant uniformément à l'intérieur de D vers $f(z)$, les fonctions sont, quel que soit le domaine D' complètement intérieur à D , localement univalentes de module ρ' dans D' à partir d'un certain rang (dépendant de D'). Je montre de plus que, les autres hypothèses restant inchangées, si $f(z)$ est localement univalente de module ρ dans D sans l'être au sens strict, il existe toujours des suites de fonctions répondant aux hypothèses et pour lesquelles le théorème n'est pas vrai.

L'univalence locale de module ρ au sens strict ne découlant pas de l'univalence simple de module ρ , il y a lieu d'étudier la multivalence d'une fonction $f(z)$, holomorphe et localement univalente de module ρ dans un domaine fini D , dans les cercles fermés de rayon ρ complètement intérieur

à D. Dans cette direction, je montre que dans tout pareil cercle (\bar{C}) fermé, $f(z)$ est au plus bivalente ; de plus, si en deux points distincts z_1 et z_2 de (\bar{C}), on a

$$f(z_1) = f(z_2),$$

z_1 et z_2 sont nécessairement sur la circonférence de (\bar{C}) et diamétralement opposés l'un à l'autre.

L'univalence locale de module ρ au sens strict suppose par contre l'univalence locale simple de module ρ , et elle implique davantage ; en effet, une fonction holomorphe et localement univalente de module ρ au sens strict dans un domaine fini D, est localement univalente de module supérieur à ρ dans tout domaine D' complètement intérieur à D et renfermant au moins un cercle de rayon supérieur à ρ .

Je montre ensuite que si $f(z)$ est holomorphe et localement univalente de module maximum ρ dans un domaine D (c'est-à-dire que l'univalence locale de $f(z)$ dans D n'a plus lieu pour un module plus grand que ρ) et si $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$, est une suite croissante de domaines, ($D_n \subset D_{n+1}$), ayant pour limite, — unique —, D, le module maximum ρ_n d'univalence locale de $f(z)$ dans D_n tend vers ρ . Cette propriété n'a pas toujours lieu lorsque les domaines D_n , dans lesquels la fonction $f(z)$ est supposée holomorphe, ne tendent pas vers D en croissant. J'indique des hypothèses plus générales sous lesquelles cette propriété est encore valable.

Je termine le premier chapitre, en indiquant quelques propriétés relatives à ce que j'ai appelé l'univalence locale de rayon ρ et qui se définit en appliquant à une fonction holomorphe dans un domaine fini quelconque D la définition de M. Montel pour l'univalence locale de module ρ dans le cercle-unité.

Dans le second chapitre, j'étudie les fonctions $f(z)$

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots$$

holomorphes dans le cercle-unité et qui y sont localement univalentes de module fini. Appelons E_ρ l'ensemble de ces fonctions qui sont localement univalentes de même module ρ , ($0 < \rho \leq 1$), dans le cercle-unité. On sait que E_ρ est une famille normale et bornée à l'intérieur du cercle-unité ; il en est alors de même pour la famille $E_\rho^{(n)}$ formée par les dérivées d'ordre n des fonctions de E_ρ .

E_ρ est de plus une famille fermée, c'est-à-dire qu'elle contient toute fonction limite unique dans le cercle-unité d'une suite infinie de fonctions lui appartenant.

Le module des fonctions de $E_p^{(n)}$ est, d'après ce qui précède, borné supérieurement sur la circonférence $|z| = r$, ($0 \leq r < 1$) ; désignons par $M_n(r, \rho)$ cette borne supérieure. Les fonctions $M_n(r, \rho)$ jouissent de propriétés communes.

Je montre, en particulier, que l'on a l'inégalité.

$$\rho_1^{n-1} M_n(r \rho_1, \rho_1) \leq \rho_2^{n-1} M_n(r \rho_2, \rho_2)$$

valable lorsque

$$0 \leq r < 1, \quad 0 < \rho_1 \leq \rho_2 \leq 1;$$

j'en déduis que, pour r constant, $M_n(r, \rho)$ est fonction continue de ρ . De plus, on voit que, pour ρ constant, $M_n(r, \rho)$ est fonction convexe de $\log r$, ($0 < r < 1$). La combinaison de ces deux résultats permet d'affirmer que $M_n(r, \rho)$ est continue sur l'ensemble du plan des (r, ρ) défini par les inégalités

$$0 < r < 1, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

Je démontre ensuite que l'on a, n étant supérieur ou égal à un, l'inégalité

$$M_n(r, \rho) \leq k^{n-1} M_n(0, k\rho) M_1(r, \rho)$$

pour toute valeur de k et toute valeur de r telles que l'on ait

$$r \leq 1 - \rho, \quad \rho \leq \frac{1}{k} \leq 1 - r.$$

Cette inégalité se déduit d'une inégalité analogue relative au module de la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction quelconque de E_p . L'étude de cette dernière inégalité dans un cas particulier, me permet de montrer que pour toute fonction $f(z)$ de E_p , on a

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{4}{\rho} - \Delta(\rho), \quad (|z| \leq 1 - \rho),$$

$\Delta(\rho)$ représentant un nombre positif ne dépendant que de ρ .

L'étude faite au premier chapitre de l'univalence locale de module ρ et celle de l'univalence locale de rayon ρ conduisent à examiner des classes particulières de domaines. L'une est celle des domaines dont tout point à distance finie est intérieur à un cercle de rayon fixe intérieur au domaine ; l'autre est celle des domaines tels que pour tout cercle de rayon inférieur à un nombre fixe et intérieur au domaine, il existe un cercle de rayon égal au nombre fixe comprenant le premier cercle à son intérieur et intérieur lui-même au domaine considéré.

Les domaines finis de la première catégorie sont tels que la valeur d'une fonction en un point quelconque joue un rôle immédiat quant à l'univalence locale de rayon ρ de cette fonction dans le domaine ; les domaines

finis de la seconde catégorie jouissent de la même propriété, puisqu'ils rentrent dans la première catégorie ; de plus, ils sont tels que toute fonction holomorphe et localement univalente de rayon ρ dans un pareil domaine, y est aussi localement univalente de module ρ , c'est-à-dire que, pour les domaines de la seconde catégorie, les notions d'univalence locale de module ρ et d'univalence locale de rayon ρ se confondent.

La frontière d'un domaine de la première catégorie a en chacun de ses points à distance finie au plus deux demi-tangentes ; si l'on considère un tel point M et un arc de circonférence de centre M et qui ne coupe ou n'atteint qu'une seule demi-tangente en M à la frontière du domaine, cet arc de circonférence ne renferme, si son rayon est suffisamment petit, qu'au plus deux points de la frontière du domaine ; dans certains cas, on peut même montrer que sur un tel arc, de rayon suffisamment petit, il n'y a qu'au plus un point de la frontière du domaine.

La frontière d'un domaine de la seconde catégorie ne peut se décomposer en deux ensembles fermés et disjoints, sans que ceux-ci ne soient distants l'un de l'autre d'au moins deux fois le nombre fixe correspondant à ce domaine ; si la frontière d'un domaine de la seconde catégorie est finie, donc bornée, le domaine est nécessairement à connexion finie.

J'indique en terminant diverses propriétés de ces domaines, en particulier, une propriété caractéristique des domaines de la seconde catégorie.

CHAPITRE I

L'UNIVALENCE LOCALE DES FONCTIONS HOLOMORPHES

1. Comme il a été dit dans l'introduction, nous étudierons dans ce chapitre diverses propriétés relatives à l'univalence locale des fonctions holomorphes. Avant de préciser cette notion, il est nécessaire de rappeler quelques définitions.

Considérons le plan complexe, c'est-à-dire, si l'on veut, le plan euclidien de représentation de la variable complexe

$$z = x + iy \quad (x, y, \text{réels}),$$

complété par le point à l'infini. Les points autres que le point à l'infini sont dits « points à distance finie ».

Nous considérons donc le plan rapporté à deux axes rectangulaires ox et oy ; menons, dans l'espace à trois dimensions, un axe oz de même origine O et perpendiculaire au plan des deux premiers ; soit P le point, de l'espace à trois dimensions, de coordonnées $(0, 0, 1)$, commun à l'axe oz et à la surface sphérique de centre l'origine et de rayon un. Nous

définissons, entre le plan complexe et cette surface sphérique, une correspondance biunivoque en faisant correspondre à chaque point M , à distance finie, du plan complexe le second point d'intersection M' distinct de P , de la droite PM avec la surface sphérique et en faisant, en outre, correspondre entre eux le point à l'infini du plan complexe et le point P .

On appelle alors voisinage d'un point M quelconque du plan complexe, l'image sur ce plan d'une calotte de la surface sphérique ayant pour pôle l'image M' de M , c'est-à-dire l'image sur le plan de l'ensemble des points de la sphère distants en ligne droite de M' de moins qu'un nombre positif fixe.

Étant donné un ensemble E quelconque du plan complexe, un point M du plan est dit intérieur à l'ensemble s'il existe un voisinage de M dont tous les points appartiennent à l'ensemble; ce point est dit extérieur à l'ensemble s'il existe un voisinage de M dont aucun point n'appartienne à E ; il est point frontière s'il n'est ni intérieur ni extérieur à E , c'est-à-dire si chacun de ses voisinages renferme des points de E et des points non de E . Le point M est point limite de E si tout voisinage de M renferme des points de E distincts de M .

Un ensemble est ouvert si, par rapport à lui, chacun de ses points est un point intérieur; un ensemble est fermé s'il contient tous ses points limites.

Soient E , un ensemble, et E' , l'image de E sur la sphère. Deux points de E sont bien enchaînés si les images de ces points sur la sphère peuvent toujours être considérées comme points extrêmes d'une suite finie de points de E' telle que la plus grande des distances rectilignes de deux points consécutifs soit inférieure à un nombre positif arbitrairement choisi. Un ensemble est bien enchaîné si deux quelconques de ses points sont bien enchaînés. Un continu est un ensemble d'au moins deux points, fermé et bien enchaîné.

Un ensemble E est dit connexe si les images sur la sphère de deux quelconques de ses points peuvent être reliées sur la sphère par une courbe définie par trois fonctions

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad \zeta = \zeta(t), \quad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1),$$

définies et continues dans l'intervalle fermé $(0, 1)$, et telle que ses points appartiennent à l'ensemble E' , image de E sur la sphère.

Un domaine se définit alors comme étant un ensemble connexe et ouvert. Un exemple de domaine est le cercle qui, dans ce qui suit, sera défini comme l'ensemble des points à distance *inférieure* à un nombre

positif fixe r d'un point M à distance finie ; r et M sont respectivement le rayon et le centre du cercle.

Considérons la frontière d'un domaine D distinct du plan complexe tout entier. Si cette frontière peut être considérée comme composée d'un nombre fini de points ou de continus, le domaine est à connexion finie ; sinon, il est à connexion infinie. La frontière d'un domaine à connexion finie se compose d'un nombre fini k de points P ou de continus C séparés, c'est-à-dire tels qu'aucun P n'appartienne à un C et que les C soient deux à deux sans points communs ; le domaine est dit alors avoir k comme ordre de connexion. L'ordre de connexion d'un domaine à connexion infinie est aussi dit, par définition, infini. Un domaine est simplement connexe ou multiplement connexe suivant que son ordre de connexion est égal à un ou supérieur à un. On dit aussi que zéro est l'ordre de connexion du plan complexe tout entier.

Un ensemble E est intérieur à un domaine D si tout point de E appartient à D ; l'ensemble E est complètement intérieur au domaine D lorsque l'ensemble fermé obtenu en adjoignant à E sa frontière, ensemble que nous désignerons par \bar{E} ⁽¹⁾, est intérieur à D .

Un domaine est fini s'il ne renferme pas le point à l'infini ; il est borné lorsque, de plus, le point à l'infini lui est extérieur.

Dans la suite de ce chapitre, nous ne considérerons que des domaines finis. On entendra par rayon intérieur d'un tel domaine, la borne supérieure de l'ensemble des rayons des cercles intérieurs au domaine si l'ensemble de ces rayons est borné supérieurement ; sinon, le rayon intérieur sera l'infini (positif) ⁽²⁾.

2. Étant donnée une fonction holomorphe dans un domaine fini D , on dit ⁽³⁾ que cette fonction est univalente dans ce domaine si elle ne prend dans D qu'une seule fois chacune de ses valeurs.

Cette fonction est dite p -valente dans D , si elle ne prend dans D qu'au plus p fois chacune de ses valeurs et s'il existe au moins une valeur que la fonction prend p fois dans D .

(1) Si D est un domaine (en particulier, un cercle), \bar{D} désignera donc l'ensemble fermé obtenu en adjoignant à D sa frontière ; nous dirons, dans ce sens, que \bar{D} est un domaine fermé (un cercle fermé).

(2) Afin de simplifier le langage, nous considérerons l'infini (positif) comme un nombre supérieur à tous les nombres positifs finis ; réciproquement, on entendra par « nombre positif inférieur à l'infini », un nombre positif fini.

(3) Paul MONTEL, Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes. Paris, Gauthier-Villars, 1933, p. 4.

Une fonction, holomorphe dans un domaine borné et fermé \bar{D} , est univalente dans ce domaine fermé si elle ne prend dans \bar{D} qu'une seule fois chacune de ses valeurs ; elle est p -valente dans le domaine \bar{D} fermé si elle ne prend dans \bar{D} qu'au plus p fois chacune de ses valeurs et s'il existe au moins une valeur que la fonction prend p fois dans \bar{D} .

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine fini D , et soit z_0 un point de ce domaine. Si $f'(z_0)$ est égal à zéro, on sait que $f(z)$ n'est univalente dans aucun cercle de centre z_0 . Par contre, si $f(z)$ est différent de zéro, $f(z)$ est univalente dans tous les cercles de centre z_0 et de rayon inférieur à un certain nombre positif ⁽¹⁾.

Par définition, le rayon d'univalence de $f(z)$ autour du point z_0 par rapport au domaine D sera : 1° égal à zéro si $f'(z_0)$ est nul ; 2° si $f'(z_0)$ est différent de zéro, il sera égal à la borne supérieure des rayons r des cercles de centre z_0 , intérieurs à D et dans lesquels $f(z)$ est univalente, ou à l'infini (positif) suivant que l'ensemble de ces rayons r est ou n'est pas borné supérieurement (ce dernier cas ne se produit que si D a comme seul point frontière le point à l'infini et si $f(z)$ est une fonction linéaire de z).

Il est immédiat que lorsque le rayon d'univalence de $f(z)$ autour du point z_0 par rapport à D n'est ni nul ni infini, $f(z)$ est univalente dans le cercle C de centre z_0 et de rayon égal à ce rayon d'univalence et il n'existe pas dans D de cercles concentriques de rayon supérieur à celui de C dans lequel $f(z)$ soit encore holomorphe et univalente. Alors, si C est complètement intérieur à D , on peut, en appliquant un raisonnement utilisé par M. Dieudonné ⁽²⁾ dans le cas des fonctions entières, montrer que sur la circonférence de C , $f(z)$ prend deux fois au moins une même valeur en des points distincts ou confondus.

3. Introduisons maintenant la notion d'univalence locale. M. Montel ⁽³⁾, se limitant à la considération du cercle-unité $|z| < 1$, dit qu'une fonction $f(z)$, holomorphe dans ce cercle, y est localement univalente de module ρ , ($0 < \rho \leq 1$), si cette fonction est univalente dans tout cercle de rayon ρ intérieur au cercle-unité.

Nous avons fait remarquer dans l'introduction que l'application de cette définition à un domaine quelconque aurait pour conséquence que

⁽¹⁾ G. JULIA, Principes géométriques d'analyse. Paris, Gauthier-Villars, 1930, pp. 1-4.

⁽²⁾ J. DIEUDONNÉ, Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe. *Annales de l'École Normale Supérieure*, t. 48, 1931, pp. 247-358 ; cf. spécialement p. 309.

⁽³⁾ P. MONTEL, Sur les fonctions localement univalentes ou multivalentes. *Annales de l'École Normale Supérieure*, t. 54, 1937, pp. 39-54.

les valeurs de la fonction en certaines parties du domaine ne joueraient pas de rôle immédiat au point de vue de l'univalence locale, puisque, étant donné un nombre positif fixe r , tout point d'un domaine arbitraire n'est pas intérieur à un cercle de rayon r et intérieur au domaine, et cela quelque petit que soit le nombre r donné. Nous sommes ainsi conduits à introduire les définitions suivantes :

Soit un domaine fini quelconque D , et soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans D ; un nombre ρ sera un *module d'univalence locale* de $f(z)$ dans D si
1° ρ est positif et non supérieur au rayon intérieur de D ;

2° $f(z)$ est univalente dans tout cercle de rayon non supérieur à ρ , intérieur à D . (Dans le cas où le rayon intérieur de D est infini, cette définition doit être évidemment entendue comme suit : un nombre positif quelconque ρ sera un module d'univalence locale de $f(z)$ dans D si la condition 2° a lieu ; l'infini (positif) sera un module d'univalence locale de $f(z)$ dans D si $f(z)$ est univalente dans tout cercle intérieur à D .)

Si, avec cette définition du module d'univalence locale, $f(z)$, holomorphe dans le domaine fini D , y admet ρ comme module d'univalence locale, $f(z)$ sera, par définition, *localement univalente de module ρ dans D* .

REMARQUE. — Il revient au même de remplacer la condition 2° ci-dessus par celle que $f(z)$ soit univalente dans tout cercle de rayon inférieur à ρ , complètement intérieur à D . En effet, s'il en est ainsi, la condition 2° est réalisée par le fait même : si C est un cercle de rayon non supérieur à ρ , intérieur à D , $f(z)$ est univalente dans C ; car sinon il existerait deux points distincts z_1 et z_2 intérieurs à C en lesquels $f(z)$ prendrait la même valeur ; par conséquent, il existerait un cercle complètement intérieur à C , — donc complètement intérieur à D et de rayon inférieur à ρ — dans lequel $f(z)$ ne serait pas univalente, contrairement à l'hypothèse faite.

On voit tout de suite que si $f(z)$, holomorphe dans le domaine fini D , y est localement univalente de module ρ , elle y est aussi localement univalente de module ρ' pour toute valeur de ρ' , positive et inférieure à ρ . Réciproquement, si $f(z)$, holomorphe dans le domaine fini D , y admet une suite croissante $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$, de modules d'univalence locale, tendant vers ρ_0 , ou, ce qui revient au même, si $f(z)$ est localement univalente de module ρ dans D pour toute valeur de ρ inférieure à ρ_0 ($\rho_0 > 0$), $f(z)$ est aussi localement univalente de module ρ_0 dans D . En effet, ρ_0 est positif et certainement non supérieur au rayon intérieur de D ; de plus, $f(z)$ est univalente dans tout cercle intérieur à D et de rayon inférieur à ρ_0 ; d'après la remarque précédente, $f(z)$ est alors localement univalente de module ρ_0 dans D .

Soit $f(z)$, holomorphe dans le domaine fini D et y admettant un module

d'univalence locale. Considérons alors l'ensemble des modules d'univalence locale de $f(z)$ dans D . Désignons par ρ_0 , soit la borne supérieure de cet ensemble, soit l'infini (positif) suivant que l'ensemble de ces modules est ou non borné supérieurement. D'après ce qui précède, ρ_0 est encore un module d'univalence locale de $f(z)$ dans D . Comme aucun nombre supérieur à ρ_0 (s'il en existe) ne peut être un module d'univalence locale de $f(z)$ dans D , nous appellerons ρ_0 le *module maximum d'univalence locale* de $f(z)$ dans D .

Enfin, une fonction $f(z)$, holomorphe dans un domaine fini D , sera dite *localement univalente à l'intérieur de D* , si dans tout domaine D' complètement intérieur à D , $f(z)$ est localement univalente de module fini, c'est-à-dire, si $f(z)$ possède un module d'univalence locale dans D' .

4. On peut montrer que l'ensemble des fonctions holomorphes dans un domaine fini D et localement univalentes à l'intérieur de D se confond avec l'ensemble des fonctions holomorphes dans D dont la dérivée ne s'annule pas dans D . On a en effet :

THÉORÈME I. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(z)$, holomorphe dans un domaine fini D , soit localement univalente à l'intérieur de D est que la dérivée première de cette fonction ne s'annule pas dans D ⁽¹⁾.

En effet, si en un point z_0 de D , on avait $f'(z_0) = 0$, $f(z)$ ne serait univalente dans aucun cercle de centre z_0 et intérieur à D , si petit que soit le rayon de ce cercle. Mais alors, si C désigne un cercle de centre z_0 complètement intérieur à D , $f(z)$ n'admet dans C aucun module d'univalence locale et n'est donc pas localement univalente à l'intérieur de D .

Réciproquement, supposons que $f'(z)$ ne s'annule pas dans D , et soit D_1 , un domaine quelconque complètement intérieur à D . Montrons que $f(z)$ admet un module d'univalence locale dans D_1 .

Soit z_0 un point quelconque de D . Désignons par $r(z_0)$, soit le nombre un, soit le rayon d'univalence de $f(z)$ autour de z_0 par rapport à D suivant que ce rayon est ou n'est pas supérieur à un ; $r(z_0)$ est différent de zéro dans D et $f(z)$ est, quel que soit z_0 de D , univalente dans le cercle de centre z_0 et de rayon $r(z_0)$, cercle toujours intérieur d'ailleurs à D .

Dans le domaine fermé D_1 , $r(z)$ est borné inférieurement par un nombre positif α ; en effet, autrement il existerait une suite de points $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, de D_1 admettant comme point limite (unique) un point z_0 de D_1

(1) La démonstration donnée ici ne diffère pas, dans son principe, de la démonstration donnée par M. Montel dans le cas du cercle-unité. Cf. P. MONTEL, *loc. cit.*, p. 60.

(z_0 est intérieur à D puisque D_1 est complètement intérieur à D) et telle que $r(z_n)$, tende vers zéro avec $(1 : n)$; ce qui est impossible, car à partir d'une certaine valeur de n , z_n est intérieur au cercle C de centre z_0 et de rayon $r(z_0)$, et donc que, à partir de la même valeur de n , $r(z_n)$ est au moins égal à la distance d_n de z_n à la circonférence de C ; or, cette distance d_n tend vers $r(z_0)$ quand n augmente indéfiniment.

Soit β le rayon intérieur de D_1 ; désignons par $\rho(D_1)$ le plus petit des deux nombres α et β ; $\rho(D_1)$ est un module d'univalence local de $f(z)$ dans D_1 , car 1° $\rho(D_1)$ est positif comme α et β et n'est pas supérieur au rayon intérieur de D_1 ; 2° si C est un cercle intérieur à D_1 , de rayon non supérieur à $\rho(D_1)$ et de centre z'_0 , C est intérieur au cercle concentrique de rayon $r(z'_0)$, dans lequel on sait que $f(z)$ est univalente ; à fortiori, $f(z)$ est univalente dans C , ce qui achève la démonstration.

On voit de la même façon que ci-dessus que, pour que $f(z)$, holomorphe dans le domaine fini D , y soit localement univalente de module fini, il faut que la dérivée $f'(z)$ ne s'annule pas dans D . Mais, cette condition n'est plus suffisante ; par exemple, la dérivée $f'(z)$ de la fonction

$$f(z) = (z - 1)^3$$

ne s'annule pas dans le cercle-unité $|z| < 1$, et cependant $f(z)$ n'est pas localement univalente de module fini dans ce cercle, car, quelque petit que soit r , $f(z)$ n'est pas univalente dans le cercle

$$|z - (1 - r)| < r \quad (0 < r \leq 1)$$

intérieur au cercle-unité et de rayon r .

5. Une fonction, holomorphe et localement univalente de module ρ dans un domaine fini D , est, par définition, univalente dans tout cercle intérieur à D et de rayon non supérieur à ρ . Elle est, par conséquent, univalente dans tout cercle fermé \bar{C} complètement intérieur à D et de rayon inférieur à ρ , car le cercle fermé \bar{C} est encore intérieur à un cercle intérieur à D et de rayon non supérieur à ρ .

Mais, lorsqu'il existe des cercles de rayon ρ complètement intérieurs à D , c'est-à-dire lorsque ρ est fini et inférieur au rayon intérieur de D , $f(z)$ n'est plus nécessairement univalente dans tout pareil cercle fermé. Ainsi, la fonction

$$f(z) = e^{\pi z}$$

est localement univalente de module 1 dans le cercle $\Gamma : |z| < 2$, sans être univalente dans tout cercle fermé de rayon intérieur à Γ ; par exemple, $f(z)$ prend la même valeur aux points d'affixes respectives i et $(-i)$ du cercle fermé $|z| \leq 1$.

On peut cependant énoncer un théorème d'où il résultera qu'une fonction $f(z)$, holomorphe et localement univalente de module ρ , dans un domaine fini D , est au plus bivalente dans tout cercle fermé complètement intérieur à D et de rayon ρ .

THÉORÈME II. — Soit $f(z)$, holomorphe et localement univalente de module ρ dans un domaine fini D , de rayon intérieur supérieur à ρ ⁽¹⁾; si la fonction $f(z)$ prend la même valeur en deux points distincts d'un cercle fermé de rayon ρ complètement intérieur à D , ces deux points sont sur la circonférence du cercle et diamétralement opposés l'un à l'autre.

En effet, soit C un cercle de rayon ρ complètement intérieur à D ; deux points quelconques z_1 et z_2 du cercle fermé \bar{C} , à moins qu'ils ne soient situés aux extrémités d'un même diamètre de C , sont toujours intérieurs à un même cercle de rayon ρ intérieur à D . Car, comme C est complètement intérieur à D , il existe un cercle Γ concentrique à C dont chaque point est centre d'un cercle de rayon ρ intérieur à D . Quels que soient z_1 et z_2 du cercle fermé \bar{C} , non situés aux extrémités d'un même diamètre, il existe, dans ce cercle Γ , comme on le vérifie facilement, un point A dont les distances à z_1 et à z_2 sont inférieures à ρ ; le cercle de centre A et de rayon ρ comprend z_1 et z_2 à son intérieur et est intérieur à D .

Cela démontre le théorème; en effet, si en deux points distincts z_1 et z_2 d'un cercle fermé \bar{C} de rayon ρ et complètement intérieur à D , on a

$$f(z_1) = f(z_2),$$

z_1 et z_2 sont situés aux extrémités d'un même diamètre de C , car, dans le cas contraire, z_1 et z_2 seraient tous deux intérieurs à un cercle C' de rayon ρ et intérieur à D dans lequel, contrairement aux hypothèses, $f(z)$ ne serait pas univalente.

Corollaire : $f(z)$ est au plus bivalente dans tout cercle fermé de rayon ρ , complètement intérieur à D .

Car si l'ordre de multivalence de $f(z)$ dans un pareil cercle fermé \bar{C} dépassait deux, $f(z)$ prendrait une même valeur en au moins trois points distincts de \bar{C} et, donc, en deux points non situés aux extrémités d'un même diamètre de C .

Nous sommes ainsi amenés à distinguer parmi les fonctions holomorphes et localement univalentes de module ρ dans un domaine fini D celles qui, lorsqu'il existe au moins un cercle de rayon ρ complètement intérieur à D ,

(1) ρ est donc fini, ce qui permet de parler d'un cercle de rayon ρ .

sont de plus univalentes dans tout pareil cercle fermé. Nous disons qu'une fonction $f(z)$, holomorphe dans un domaine fini D , est *localement univalente de module ρ au sens strict dans D* si d'abord ρ est un module d'univalence locale de $f(z)$ dans D et si de plus, dans le cas où ρ est inférieur au rayon intérieur de D , $f(z)$ est aussi univalente dans tout cercle fermé de rayon ρ complètement intérieur à D .

On remarquera que si ρ est un module d'univalence locale dans le domaine fini D de la fonction $f(z)$, holomorphe dans D , mais n'est pas le module maximum d'univalence locale de $f(z)$ dans D , $f(z)$ est toujours localement univalente de module ρ au sens strict dans D .

6. La propriété d'univalence locale à l'intérieur d'un domaine fini D et la propriété d'univalence locale de module ρ dans D se transmettent, à partir des fonctions d'une suite, uniformément convergente à l'intérieur de D ⁽¹⁾, de fonctions holomorphes dans D , à la fonction limite pourvu que celle-ci ne soit pas constante.

On a en effet les théorèmes ci-après :

THÉORÈME III. — Si une suite de fonctions, holomorphes dans un domaine fini D et localement univalentes à l'intérieur de D , converge uniformément à l'intérieur de ce domaine vers une fonction limite non constante, cette fonction limite est aussi localement univalente à l'intérieur de D .

THÉORÈME IV. — Si une suite de fonctions, holomorphes et localement univalentes de module ρ dans un domaine fini D , converge uniformément à l'intérieur de D vers une fonction limite non constante, cette fonction limite est encore localement univalente de module ρ dans D ⁽²⁾.

Pour démontrer le premier de ces deux théorèmes il suffit, d'après le théorème I, de montrer que la dérivée $f'(z)$ de la fonction limite $f(z)$ ne

⁽¹⁾ Rappelons qu'une suite $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$ de fonctions holomorphes dans un domaine converge uniformément dans ce domaine si pour tout ϵ positif, on a à partir d'une certaine valeur $n(\epsilon)$ de l'indice n et pour tout entier positif p ,

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \epsilon$$

quel que soit z dans D , ou, par extension, si pour tout N positif si grand qu'il soit, on a à partir d'un certain rang

$$|f_n(z)| > N$$

quel que soit z dans D ; dans ce cas $f_n(z)$ est dite converger uniformément vers l'infini dans D , et la fonction limite est la constante infinie.

La suite converge uniformément à l'intérieur de D si elle converge uniformément dans tout domaine D_1 complètement intérieur à D .

⁽²⁾ Le théorème est dû à M. Montel, *loc. cit.*, p. 60.

s'annule pas dans D. Soient $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$, les fonctions de la suite, les dérivées $f'_1(z), f'_2(z), \dots, f'_n(z), \dots$, ne s'annulent pas dans D et convergent uniformément à l'intérieur de D vers la dérivée $f'(z)$ de la fonction limite ; par hypothèse, $f'(z)$ n'est pas identiquement nulle. Alors, tout zéro de $f'(z)$ doit être, en vertu de la propriété d'accumulation des zéros des fonctions d'une suite uniformément convergente ⁽¹⁾, limite de zéros des fonctions $f'_n(z)$; comme ces fonctions ne s'annulent pas dans D, $f'(z)$ ne s'annule pas non plus dans D.

C. Q. F. D.

Démontrons le second de ces deux théorèmes. Soient encore $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$, les fonctions de la suite et, $f(z)$ la fonction limite.

D'après la remarque indiquée à la page 61, il suffit, pour établir notre thèse, de montrer que $f(z)$ est univalente dans tout cercle complètement intérieur à D et de rayon inférieur à ρ . Soit C un tel cercle ; la suite des fonctions $f_n(z)$ converge uniformément dans C vers la fonction $f(z)$ non constante. Mais alors, d'après un théorème de M. Montel ⁽²⁾, $f(z)$ est, comme les $f_n(z)$, univalente dans C. D'après ce que nous venons de dire, cela suffit pour établir le théorème IV.

7. Démontrons la réciproque du théorème III ; on a

THÉORÈME V. — Si la fonction limite d'une suite, uniformément convergente à l'intérieur d'un domaine fini D, de fonctions holomorphes dans ce domaine, est localement univalente à l'intérieur D, les fonctions de la suite sont, à l'intérieur de tout domaine D' complètement intérieur à D, localement univalentes à partir d'un certain rang.

En effet, soient $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$ les fonctions de la suite et $f(z)$ la fonction limite ⁽³⁾. Les dérivées $f'_1(z), f'_2(z), \dots, f'_n(z), \dots$, des fonctions de la suite convergent uniformément à l'intérieur de D vers la dérivée $f'(z)$ de $f(z)$; $f'(z)$ ne s'annule pas dans D. La proposition qui nous a servi pour établir le théorème direct, nous permet encore d'affirmer que dans tout domaine D' complètement intérieur à D, les fonctions $f'_n(z)$ ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, ce qui, en vertu du théorème I, démontre le présent théorème.

On remarque que, même en supposant la convergence uniforme dans D, on ne peut pas, en général, affirmer que les fonctions de la suite sont à

⁽¹⁾ P. MONTEL, Leçons sur les fonctions univalentes..., p. 7.

⁽²⁾ P. MONTEL, Sur les suites de fonctions analytiques qui ont pour limite une constante, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 53, 1925, p. 246-257.

⁽³⁾ $f(z)$ est non constante d'après les hypothèses faites ; en particulier, $f(z)$ n'est pas la constante infinie.

partir d'un certain rang localement univalentes à l'intérieur de D. Posons, par exemple,

$$f_n(z) = z^2 - 2 \frac{n-1}{n} z;$$

$f_n(z)$ converge uniformément dans le cercle-unité vers la fonction

$$f(z) = z^2 - 2z;$$

$f(z)$ est localement univalente à l'intérieur du cercle-unité, car $f'(z)$ ne s'annule pas dans ce cercle; mais comme l'on a

$$f'_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0,$$

quelque grand que soit n , $f_n(z)$ n'est pas localement univalente à l'intérieur du cercle-unité.

On remarquera aussi que si $f'(z)$ s'annule en un point de D, la conclusion du théorème V ne peut être valable pour toute suite, uniformément convergente à l'intérieur de D, de fonctions holomorphes dans D. Elle n'est déjà plus valable pour la suite des fonctions

$$f_n(z) = f(z) + n^{-1}.$$

8. On ne peut formuler pour le théorème IV une réciproque parallèle à celle du théorème III que si l'on suppose la fonction limite $f(z)$ localement univalente de module ρ au sens strict dans D. On a alors

THÉORÈME VI. — Si la fonction limite d'une suite, uniformément convergente à l'intérieur d'un domaine fini D, de fonctions holomorphes dans D, est localement univalente de module ρ au sens strict dans D, dans tout domaine D', complètement intérieur à D et de rayon intérieur r' , les fonctions de la suite sont à partir d'un certain rang, localement univalentes de module ρ' si ρ' désigne le plus petit des deux nombres ρ et r' .

Soient en effet $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, ..., les fonctions de la suite et $f(z)$ la fonction limite. Soit D' un domaine quelconque complètement intérieur à D; D' est donc borné et son rayon intérieur est fini; donc ρ' est fini. Comme ρ' est positif et ne surpasse pas le rayon intérieur de D', il suffit, pour établir le théorème, de démontrer que, pour n assez grand, $f_n(z)$ est univalente dans tout cercle intérieur à D' et de rayon non supérieur à ρ' .

Supposons, par impossible, qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors une suite indéfiniment croissante d'entiers positifs n_k telle qu'à chaque n_k cor-

répondre un cercle γ_K intérieur à D' , de rayon r_K non supérieur à ρ' et tel que $f_{n_K}(z)$ ne soit pas univalente dans le cercle γ_K .

L'ensemble des rayons r_K des cercles γ_K est borné supérieurement, puisque r_K est non supérieur à ρ' ; d'autre part, l'ensemble des centres de ces cercles est borné comme le domaine D' auquel il appartient. La suite des γ_K contient alors une suite partielle $\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2}, \dots, \gamma_{m_i}, \dots$, admettant un seul cercle limite fermé $\bar{\gamma}$ ⁽¹⁾, pouvant se réduire à un point. Le cercle $\bar{\gamma}$ fermé est de rayon non supérieur à ρ' , donc de rayon non supérieur à ρ ; il appartient au domaine fermé \bar{D}' et est ainsi complètement intérieur à D . Par conséquent dans $\bar{\gamma}$ fermé, $f(z)$ est univalente et $f'(z)$ est différente de zéro (si $\bar{\gamma}$ se réduit à un point, seule importe la seconde de ces deux propriétés).

Dans ces conditions, il existe dans D un cercle γ' qui comprend $\bar{\gamma}$ à son intérieur et dans lequel $f(z)$ est encore univalente. Si $\bar{\gamma}$ se réduit à un point, cela résulte du fait que $f'(z)$ ne s'annule pas en ce point. Si $\bar{\gamma}$ n'est pas réduit à un point, soit c son centre; s'il n'existait pas de cercles γ' répondant aux conditions énoncées, le rayon de $\bar{\gamma}$ serait égal au rayon d'univalence de $f(z)$ autour de c par rapport à D ; alors, d'après la remarque faite à la page 60, $f(z)$ devrait prendre deux fois au moins une même valeur en des points distincts ou confondus de la circonférence de γ , ce qui est impossible comme nous l'avons vu.

Soient donc γ' un cercle répondant aux conditions de l'alinéa précédent, et γ'' un cercle concentrique de rayon intermédiaire entre ceux de γ et de γ' . Les fonctions $f_n(z)$ convergent uniformément vers $f(z)$ à l'intérieur de γ' et sont donc, à partir d'un certain rang, univalentes dans le cercle γ'' ⁽²⁾.

D'autre part, pour i assez grand, γ_{m_i} est intérieur à γ'' . D'où il résulte que, pour i assez grand, $f_{n_{m_i}}(z)$ est univalente dans γ_{m_i} , contrairement à ce qui avait été supposé.

⁽¹⁾ Soit $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ une suite de cercles dont les centres c_n forment un ensemble borné ayant un seul point limite c et dont les rayons r_n sont bornés supérieurement et ont une seule valeur limite r_0 . La suite de ces cercles est dite admettre un seul cercle limite fermé \bar{C} qui est, par définition, 1°) si r_0 est différent de zéro, le cercle fermé de centre c et de rayon r_0 , 2°) si r_0 est nul, le point c (considéré comme cas limite d'un cercle fermé). On s'assure facilement que tout point limite d'une suite de points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, dans laquelle P_n appartient au cercle fermé \bar{C}_n , appartient lui-même à \bar{C} et que, par conséquent, si l'on considère un cercle C' concentrique à C et de rayon supérieur à r_0 , les C_n sont à partir d'un certain rang tous intérieurs à C .

Si r_0 est différent de zéro, la suite des C_n est dite admettre un seul cercle limite C qui est, par définition, le cercle de centre c et de rayon r_0 .

Avec la terminologie de M. HAUSDORFF (*Mengenlehre*, de Gruyter, Berlin, 1927, pp. 146 et 147), \bar{C} est la limite fermée des C_n et C , leur limite ouverte.

⁽²⁾ P. MONTEL, *loc. cit.*, p. 66. — Voir aussi P. MONTEL, *Leçons sur les fonctions univalentes*, p. 9.

Nous aboutissons à une contradiction, et le théorème est démontré.

REMARQUES. — I. Comme pour le théorème précédent, on remarque que, même en supposant la convergence uniforme dans D , on ne peut pas affirmer en général que les fonctions de la suite sont, à partir d'un certain rang, localement univalentes de module ρ dans D . Reprenons l'exemple des fonctions

$$f_n(z) = z^2 - 2 \frac{n-1}{n} z,$$

qui convergent uniformément dans le cercle-unité $|z| \leq 1$ vers la fonction

$$f(z) = z^2 - 2z.$$

La fonction $f(z)$ est univalente dans le cercle-unité ; car les racines de l'équation

$$f(z) = A$$

sont symétriques par rapport au point d'affixe un ; quel que soit ρ compris entre zéro et un, $f(z)$ est donc localement univalente de module ρ au sens strict dans le cercle-unité alors que, comme nous l'avons vu, $f_n(z)$ n'admet, quel que soit n , aucun module d'univalence locale dans ce cercle.

II. Le fait que $f(z)$ soit localement univalente de module ρ au sens strict dans le domaine fini D est donc une condition suffisante pour que le théorème VI soit vrai pour toute suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément à l'intérieur de D vers $f(z)$. Cette condition est aussi nécessaire, c'est-à-dire que si $f(z)$ n'est pas localement univalente de module ρ au sens strict dans D , il existe toujours au moins une suite de fonctions holomorphes dans D , convergeant uniformément à l'intérieur de D vers $f(z)$ et pour laquelle la conclusion du théorème VI n'est pas valable.

En effet, d'après les définitions, si $f(z)$ est holomorphe et localement univalente de module ρ dans le domaine fini D sans l'être au sens strict, ρ est plus petit que le rayon intérieur de D , et il existe un cercle fermé de rayon ρ complètement intérieur à D dans lequel $f(z)$ n'est pas univalente. Si $f(z)$ n'est pas localement univalente de module ρ dans D , il existe un cercle fermé complètement intérieur à D et de rayon plus petit que ρ dans lequel $f(z)$ n'est pas univalente. Désignons, dans les deux cas, ce cercle fermé par \bar{C} . Il existe dans \bar{C} deux points z_1 et z_2 distincts tels qu'en ces points, on ait

$$f(z_1) = f(z_2).$$

Désignons par A cette valeur commune. On peut écrire

$$f(z) = A + (z - z_1)(z - z_2)\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans D. Posons

$$f_n(z) = A + \left(z - \frac{(n-1)z_1 + z_2}{n} \right) \left(z - \frac{(n-1)z_2 + z_1}{n} \right) \varphi(z), \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

La suite des $f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ à l'intérieur de D ; en effet, 1° on a

$$|f(z) - f_n(z)| = |\varphi(z)| |z_1 - z_2|^2 \left(\frac{n-1}{n^2} \right),$$

et 2° $\varphi(z)$ étant holomorphe dans D, $|\varphi(z)|$ est borné supérieurement dans tout domaine complètement intérieur à D. Mais, on a

$$f_n \left(\frac{(n-1)z_1 + z_2}{n} \right) = f_n \left(\frac{(n-1)z_2 + z_1}{n} \right),$$

et, pour n supérieur à deux, les points d'affixes respectives

$$\frac{(n-1)z_1 + z_2}{n}, \quad \frac{(n-1)z_2 + z_1}{n}$$

sont distincts et intérieurs à C. Par conséquent, les fonctions $f_n(z)$ ne sont à partir d'aucun rang toutes univalentes dans le cercle (ouvert) C de rayon non supérieur à ρ et complètement intérieur à D, et pour la suite de ces fonctions, la conclusion du théorème VI n'est pas valable.

III. Examinons de plus près le cas où la fonction limite est localement univalente de module ρ sans l'être au sens strict.

Soit donc une fonction $f(z)$, holomorphe dans le domaine fini D et localement univalente de module ρ dans ce domaine, mais non au sens strict. Alors d'après les considérations faites au paragraphe 5, ρ est fini et inférieur au rayon intérieur de D ; de plus, ρ est le module maximum d'univalence locale de $f(z)$ dans D.

Soit $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$, une suite de fonctions holomorphes dans D, convergeant uniformément vers $f(z)$ à l'intérieur de D.

Si le domaine D', complètement intérieur à D, est de rayon intérieur ρ' plus petit que ρ , la conclusion du théorème VI reste valable : les fonctions de la suite sont à partir d'un certain rang localement univalentes de module ρ' dans D' ; cela résulte du théorème VI lui-même en remarquant que $f(z)$ est localement univalente de module ρ'' au sens strict dans D pour toute valeur de ρ'' positive et inférieure à ρ .

Si le domaine D', complètement intérieur à D, est de rayon intérieur plus grand ou égal à ρ , on voit de la même façon que, quel que soit ρ' plus petit que ρ , les fonctions de la suite sont, à partir d'un certain rang, localement univalentes de module ρ' dans D'.

On peut ainsi énoncer le théorème

THÉORÈME VI'. — Si la fonction limite d'une suite, uniformément convergente à l'intérieur d'un domaine fini D , de fonctions holomorphes dans D , est localement univalente de module ρ dans D , 1° dans tout domaine complètement intérieur à D et de rayon intérieur ρ' plus petit que ρ , les fonctions de la suite sont à partir d'un certain rang localement univalentes de module ρ' ; 2° dans tout domaine complètement intérieur à D et de rayon intérieur supérieur ou égal à ρ (s'il en existe), les fonctions de la suite, pour toute valeur de ρ' positive et inférieure à ρ , sont à partir d'un certain rang localement univalentes de module ρ' .

9. Nous avons déduit le théorème VI' du théorème VI; le théorème suivant permettrait de revenir du théorème VI' au théorème VI.

THÉORÈME VII. — Si la fonction $f(z)$ est holomorphe et localement univalente de module ρ au sens strict dans le domaine fini D de rayon intérieur plus grand que ρ ⁽¹⁾, dans tout domaine D' , complètement intérieur à D et de rayon intérieur plus grand que ρ , $f(z)$ est localement univalente de module supérieur à ρ .

Le théorème est évident si $f(z)$ est une fonction linéaire de z ; nous le démontrerons donc en supposant $f(z)$ non linéaire; cela entraîne que le rayon d'univalence de $f(z)$ par rapport à D autour d'un point quelconque de D est fini.

Soit donc D' un domaine complètement intérieur à D et de rayon intérieur r' plus grand que ρ ; soit E' l'ensemble des points de D' dont la distance à la frontière de D' est au moins égale à ρ ; E' n'est pas vide et est un ensemble fermé et borné.

Soient P , un point de E' , et C , le cercle de centre P et de rayon ρ . C est intérieur à D' , donc complètement intérieur à D ; par conséquent, $f(z)$ est univalente dans le cercle fermé \bar{C} et $f'(z)$ ne s'annule pas dans \bar{C} . On voit alors comme à la page 68, qu'il existe dans D un cercle concentrique à C , de rayon plus grand que ρ et dans lequel $f(z)$ est encore univalente; le rayon d'univalence $r(P)$ de $f(z)$ autour du point P par rapport au domaine D est donc supérieur à ρ . Sur E' , qui est fermé et borné, $r(P)$ a alors une borne inférieure r'' plus grande que ρ ; en supposant le contraire, on

(1) Même remarque qu'à la page 64.

arriverait, par un raisonnement semblable à celui fait à la page 62, à une contradiction, puisque en tout point de E' , $r(P)$ est plus grand que ρ ⁽¹⁾.

Désignons par ρ' le plus petit des deux nombres ρ' et ρ'' ; ρ' est, comme ρ' et ρ'' , plus grand que ρ . Montrons que ρ' est un module d'univalence locale de $f(z)$ dans D' . D'abord, ρ' est positif et non supérieur au rayon intérieur de D' . Ensuite, $f(z)$ est univalente dans tout cercle C intérieur à D' et de rayon non supérieur à ρ' . En effet, si le rayon de C n'est pas supérieur à ρ , cela résulte directement des hypothèses; si le rayon de C est supérieur à ρ et non supérieur à ρ' , le centre de C appartient à E' , et le rayon de C n'est pas supérieur à la valeur de $r(P)$ au centre de C ; $f(z)$ est donc encore univalente dans C .

Ainsi $f(z)$ est localement univalente de module ρ' , plus grand que ρ , dans D' , et le théorème est démontré.

10. Au lieu d'examiner, comme dans les paragraphes précédents, le comportement du module d'univalence locale des fonctions d'une suite uniformément convergente, étudions maintenant le comportement du module maximum d'univalence locale d'une même fonction $f(z)$ dans un domaine variable.

Considérons un exemple simple. Désignons par D le cercle-unité $|z| < 1$, par D_n , le domaine obtenu en retranchant du cercle-unité le point d'affixe $(2 : n)$, par D'_n , celui obtenu en retranchant du cercle-unité le point d'affixe $(1 - 2 : n)$; D_n et D'_n sont intérieurs à D et ont chacun D pour limite unique ⁽²⁾. Posons

$$f(z) = z$$

et soient ρ, ρ_n, ρ'_n respectivement les modules maximums d'univalence locale de $f(z)$ dans D, D_n, D'_n . On a

$$\rho = 1, \quad \rho_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \quad \rho'_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Ce qui fait que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho'_n = 1 = \rho.$$

⁽¹⁾ Cela résulte aussi du fait, facile à établir, que le rayon d'univalence $r(z_0)$ de $f(z)$ autour du point z_0 par rapport à D est une fonction continue de z_0 (il y a semi-continuité inférieure et semi-continuité supérieure) ou est constamment égal à l'infini, ceci ne se produisant que si $f(z)$ est une fonction linéaire et D , le plan complexe tout entier (à l'exception du point à l'infini).

⁽²⁾ Pour la définition de plus grande limite, plus petite limite, limite d'une suite infinie d'ensembles, cf. C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire*. Paris, Gauthier-Villars, 1934.

On voit aussi que si nous rangions les D_n et les D'_n en une suite unique en posant

$$D''_{2n-1} = D_n, \quad D''_{2n} = D'_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

le module maximum ρ''_n d'univalence locale de $f(z)$ dans D''_n ne tendrait vers aucune limite lorsque n augmente indéfiniment.

On voit par ces exemples que le comportement du module maximum d'univalence locale d'une fonction dans des domaines formant une suite, est très différent suivant la suite de domaines que l'on considère. Ce comportement se régularise si l'on suppose que les domaines de la suite vont en augmentant. On a alors le théorème :

THÉORÈME VIII. — Si les domaines d'une suite D_n vont en augmentant et ont pour limite le domaine fini D et si la fonction $f(z)$ est holomorphe et localement univalente de module fini dans D , $f(z)$ est localement univalente de module fini dans D_n , et le module maximum d'univalence locale de $f(z)$ dans le domaine D_n a pour limite, quand n augmente indéfiniment, le module maximum d'univalence locale de $f(z)$ dans D .

La démonstration de ce théorème repose sur le fait qu'un ensemble quelconque E complètement intérieur à D est intérieur à partir d'un certain rang à tous les D_n .

Établissons d'abord cette propriété. Soit P un point quelconque de l'ensemble fermé \bar{E} . Par définition, il existe un domaine de la suite auquel P est intérieur ; soit $n(P)$ l'indice de ce domaine ; alors, il existe aussi un cercle C_P de centre P intérieur à $D_{n(P)}$ et donc à tous les domaines suivants. Chaque point P de \bar{E} est intérieur à un C_P et \bar{E} est fermé et borné. On peut couvrir tout \bar{E} au moyen d'un nombre fini K de ces cercles : $C_{P_1}, C_{P_2}, \dots, C_{P_K}$. Si l'on représente par v le plus grand des indices $n(P_1), n(P_2), \dots, n(P_K)$, \bar{E} est intérieur au domaine D_v et à tous les suivants.

C. Q. F. D.

Il résulte de là en particulier que le rayon intérieur r_n de D_n a pour limite, quand n augmente indéfiniment, le rayon intérieur r de D ; en effet, 1° r_n est plus petit que r ; 2° étant donné un nombre quelconque r' plus petit que r , il existe un cercle C de rayon r' , complètement intérieur à D ; pour n assez grand, C est intérieur à tous les D_n ; donc, pour n assez grand, r_n est plus grand que r' .

Venons-en à la démonstration du théorème. D'abord, si ρ est le module maximum d'univalence locale de $f(z)$ dans D et si r_n désigne le rayon

intérieur de D_n , le plus petit des deux nombres ρ et r_n est un module d'univalence locale de $f(z)$ dans D_n .

Ensuite soit ρ_n le module maximum d'univalence locale de $f(z)$ dans D_n . Si ρ est égal au rayon intérieur de D , ρ_n est égal à r_n et a donc pour limite ρ . Si ρ est plus petit que le rayon intérieur de D , à partir d'une certaine valeur n_0 de n , ρ est plus petit que r_n . On a donc dans ce cas

$$\rho \leq \rho_n, \quad (n \geq n_0),$$

et, par conséquent,

$$l = \lim \rho_n \geq \rho.$$

Pour montrer que ρ_n tend vers ρ , il suffit donc de montrer que l'on a

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho.$$

L n'est certainement pas inférieur à ρ . Supposons alors que L soit plus grand que ρ et soit ρ' compris entre ρ et L ; il existe une suite indéfiniment croissante d'indices n_i telle que l'on ait

$$\rho_{n_i} \geq \rho'.$$

Un cercle quelconque C de rayon plus petit que ρ' et complètement intérieur à D , appartient à partir d'un certain rang n_0' à tous les D_n et donc aussi, à partir d'une certaine valeur i_0 de l'indice i , à tous les D_{n_i} . Par conséquent, $f(z)$ est univalente dans C , ce qui entraîne, puisque ρ' est inférieur au rayon intérieur de D , que ρ' est un module d'univalence locale de $f(z)$ dans D . Cela ne peut être car ρ est, par hypothèse, le module maximum d'univalence locale de $f(z)$ dans D .

Par conséquent L est égal à ρ et le théorème est démontré.

REMARQUES. — La seconde partie de l'énoncé reste vraie si l'on convient de dire qu'une fonction, qui n'admet aucun module d'univalence locale dans un domaine, admet zéro comme module maximum d'univalence locale dans ce domaine.

Les exemples donnés plus haut montrent qu'il ne suffit pas de supposer que D_n , intérieur au domaine fini D , ait pour limite D pour que le module maximum d'univalence locale dans D_n d'une fonction $f(z)$ (holomorphe dans D) tende vers le module maximum d'univalence locale de $f(z)$ dans D , quand n augmente indéfiniment.

Le théorème VIII reste néanmoins valable si au lieu de supposer que D_n tende vers D en croissant, on suppose seulement que D_n , intérieur à D , tende vers D de façon qu'un voisinage suffisamment petit d'un point

quelconque de D n'ait de points communs qu'avec un nombre fini de frontières de domaines D_n .

Car dans ce cas, un point quelconque de D est encore centre d'un cercle appartenant à tous les D_n à partir d'un certain rang. En effet, si P est un point quelconque de D , à partir d'un certain rang n_0 , P appartient à tous les D_n ; de plus, la distance d_n de P à la frontière de D_n , ($n \geq n_0$) a une borne inférieure positive d , en vertu de l'hypothèse faite. Le cercle de centre P et de rayon d appartient à D_{n_0} et à tous les domaines suivants. Ce point établi, on peut reprendre les raisonnements faits au théorème VIII ⁽¹⁾.

Mais, on ne peut sans plus supprimer l'hypothèse que D_n soit intérieur à D . Par exemple, on peut former une suite de domaine D_n admettant le cercle-unité D , $|z| < 1$, comme limite (unique), et telle que D_n renferme cependant le point d'affixe

$$z_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Alors la fonction

$$f(z) = \sin z,$$

dont le module maximum d'univalence locale dans D est un, n'admet cependant aucun module d'univalence dans D_n .

11. Étudions maintenant ce que nous avons appelé « univalence locale de rayon fini ».

Soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine fini D . Un nombre ρ sera un rayon d'univalence locale de $f(z)$ dans D si

1° ρ est positif, fini et non supérieur au rayon intérieur de D ;

2° $f(z)$ est univalente dans tout cercle de rayon ρ intérieur à D .

Si la fonction $f(z)$, holomorphe dans un domaine fini D , y admet ρ comme rayon d'univalence locale, $f(z)$ sera dite localement univalente de rayon ρ dans D . Si l'on suppose seulement l'existence d'un rayon d'univalence locale de $f(z)$ dans D , on dira que $f(z)$ est localement univalente de rayon fini dans D .

Un rayon ρ d'univalence locale dans un domaine fini D d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans D sera rayon d'univalence locale au sens strict de $f(z)$ dans D si $f(z)$ est aussi univalente dans tout cercle fermé de rayon ρ complètement intérieur à D ; s'il en est ainsi, $f(z)$ sera dite localement

(1) L'hypothèse faite s'exprime aussi en disant que D_n , intérieur à D , a pour limite ouverte D (Cf. HAUSDORFF, *loc. cit.*, p. 122) ou encore, si l'on désigne respectivement par φ_n et φ les fonctions caractéristiques des domaines D_n et D (cf. de la VALLÉE POUSSIN, *loc. cit.*, p. 72) en disant que 1° φ_n n'est pas supérieur à φ , 2° φ_n converge uniformément vers φ à l'intérieur de D .

univalente de rayon ρ au sens strict dans D . Par exemple, si $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$, est une suite décroissante tendant vers $\rho_0 > 0$ et si $f(z)$, holomorphe dans le domaine fini D , admet chaque ρ_n comme rayon d'univalence locale dans D , ρ_0 est un rayon d'univalence locale de $f(z)$ au sens strict dans D .

Les considérations et les exemples suivants indiquent que les propriétés de l'univalence locale de rayon ρ dépendent du domaine considéré d'une façon plus marquée que les propriétés de l'univalence locale de module ρ .

Nous avons déjà fait remarquer que si D est un domaine fini quelconque, les valeurs de la fonction en certaines parties du domaine ne jouent pas de rôle immédiat au point de vue de l'univalence locale de rayon ρ . Il n'en sera autrement que si tout point de D est intérieur à un cercle de rayon ρ intérieur lui-même à D ; nous désignerons un domaine satisfaisant à cette condition par la notation $D(\rho)$ ⁽¹⁾.

De plus, il existe une catégorie de domaines tels que l'univalence locale de rayon ρ dans un de ces domaines d'une fonction quelconque entraîne l'univalence locale de module ρ de cette fonction dans ce même domaine; ces domaines sont tels que tout cercle de rayon inférieur à ρ et intérieur au domaine est intérieur à un cercle de rayon ρ appartenant lui-même au domaine; nous désignerons ces domaines par la notation $\Delta(\rho)$ ⁽¹⁾.

Dans le cas général, l'univalence locale de rayon ρ_0 dans un domaine fini D d'une fonction holomorphe dans D n'entraîne plus l'univalence locale de rayon ρ pour toute valeur de ρ plus petite que ρ_0 . Par exemple, considérons le domaine obtenu par la réunion des trois cercles

$$|z - 2| < 2, \quad |z + 2| < 2, \quad |z| < 1.$$

La fonction $f(z) = z^2$ est localement univalente de rayon 2 dans ce domaine, mais n'y est pas localement univalente de rayon un.

12. Diverses propriétés rapprochent l'une de l'autre les notions d'univalence locale de rayon ρ et d'univalence locale de module ρ .

Ainsi, si les nombres positifs $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$ tendent en croissant vers une limite finie ρ_0 et si chaque ρ_n est rayon d'univalence locale dans le domaine fini D pour une fonction $f(z)$ holomorphe dans D , ρ_0 est aussi un rayon d'univalence locale de $f(z)$ dans D .

Si donc les rayons d'univalence locale dans le domaine fini D de la fonction $f(z)$ holomorphe dans D ont une borne supérieure finie, cette borne supérieure est encore un rayon d'univalence locale de $f(z)$ dans D ; nous l'appellerons : rayon maximum d'univalence locale de $f(z)$ dans D .

⁽¹⁾ Voir au troisième chapitre, l'étude de diverses propriétés des domaines $D(\rho)$ et $\Delta(\rho)$.

Le théorème II et son corollaire restent valables lorsqu'on les applique à une fonction $f(z)$ holomorphe et localement univalente de rayon ρ dans un domaine fini D de rayon intérieur plus grand que ρ , car la démonstration du théorème II utilise uniquement le fait que $f(z)$ est univalente dans tout cercle de rayon ρ complètement intérieur à D .

On peut, de même, énoncer le théorème ci après correspondant au théorème IV :

THÉORÈME IX. — Si une suite de fonctions, holomorphes et localement univalentes de rayon ρ dans un domaine fini D , converge uniformément dans l'intérieur de D vers une fonction limite non constante, cette fonction limite est encore localement univalente de rayon ρ dans D .

Ce théorème admet la réciproque suivante :

THÉORÈME X. — Si la fonction limite d'une suite, uniformément convergente à l'intérieur d'un domaine fini D , de fonctions holomorphes dans D , est localement univalente de rayon ρ au sens strict dans D , dans tout domaine D' , complètement intérieur à D et de rayon intérieur au moins égal à ρ , les fonctions de la suite sont à partir d'un certain rang localement univalentes de rayon ρ .

La démonstration du théorème X est semblable à celle du théorème VI. Il y a une seule différence. Les cercles γ_k , qui intervenaient dans la démonstration du théorème VI, sont cette fois-ci tous de rayon ρ ; de sorte que le cercle limite fermé est aussi de rayon ρ . Il faut montrer que, dans $\bar{\gamma}$ fermé, 1° $f(z)$ est univalente; 2° $f'(z)$ ne s'annule pas. Le premier point est réalisé par hypothèse; pour établir le second point, on remarque que si $f'(z)$ s'annulait en un point z_0 de $\bar{\gamma}$, $f(z)$ ne serait univalente dans aucun cercle de rayon ρ , intérieur à D et comprenant le point z_0 à son intérieur; or, il existe de pareils cercles, car $\bar{\gamma}$ est de rayon ρ et est complètement intérieur à D .

13. Considérons maintenant l'ensemble E des fonctions holomorphes et localement univalentes de rayon ρ dans un domaine fini $D(\rho)$ [dont chaque point est donc intérieur à un cercle de rayon ρ intérieur lui-même à $D(\rho)$].

Soit $E^{(1)}$ l'ensemble des dérivées premières des fonctions de E . $E^{(1)}$ est une famille normale dans $D(\rho)$.

En effet, dans un cercle quelconque de rayon ρ intérieur à $D(\rho)$, les fonctions de $E^{(1)}$ forment une famille normale ⁽¹⁾. Comme tout point de $D(\rho)$ est intérieur à un cercle de rayon ρ intérieur à $D(\rho)$, la famille $E^{(1)}$

⁽¹⁾ P. MONTEL, Leçons sur les fonctions univalentes..., p. 34.

est normale autour de chaque point de $D(\rho)$; donc ⁽¹⁾, $E^{(1)}$ est une famille normale dans $D(\rho)$.

Il n'en est pas de même de la famille E . E est cependant quasi-normale à l'intérieur de D , c'est-à-dire quasi-normale d'ordre fini dans tout domaine D' complètement intérieur à D .

En effet, chaque point du domaine \bar{D}' appartient à un cercle C de rayon ρ intérieur à D . \bar{D}' étant borné et fermé, il existe donc un nombre fini k de cercles de rayon ρ intérieurs à D dont l'ensemble couvre D' , c'est-à-dire que chaque point de D' est intérieur à un de ces k cercles ; on peut alors ranger ces k cercles, au besoin en répétant un nombre fini de fois certains d'entre eux, en une suite $C_1, C_2, \dots, C_{k'}$, de façon que deux cercles consécutifs de la suite aient une partie commune.

Dans chacun de ces k' cercles, la famille E est quasi-normale d'ordre un ⁽²⁾.

Alors, étant donnée une suite quelconque de fonctions de E , deux cas peuvent se produire. Ou bien cette suite contient une suite partielle convergeant uniformément vers une fonction holomorphe à l'intérieur d'un des C_i , et alors cette suite partielle converge uniformément à l'intérieur de l'ensemble des C_i et donc à l'intérieur de D' . Ou bien cette suite contient une suite partielle qui converge uniformément vers l'infini à l'intérieur de C_1 avec au plus un point exceptionnel ; cette suite partielle contient une nouvelle suite partielle convergeant uniformément vers l'infini à l'intérieur de C_2 avec au plus un point exceptionnel et ainsi de suite ; finalement la suite proposée converge uniformément vers l'infini à l'intérieur de l'ensemble des C_i , donc à l'intérieur de D' , avec au plus k points exceptionnels.

Ainsi, une suite quelconque de fonctions de E renferme une suite partielle qui converge uniformément à l'intérieur de D' avec au plus k points exceptionnels ; et D est une famille quasi-normale dans D' d'ordre au plus égal à k .

C. Q. F. D.

14. Les analogies remarquées entre certains résultats obtenus dans le cas de l'univalence locale de module ρ et certains résultats obtenus dans le cas de l'univalence locale de rayon ρ , ont leur origine dans le fait que dans ces questions on considère, au fond, des fonctions holomorphes et univalentes dans les domaines d'un ensemble de domaines, ensemble qui, dans les deux cas, satisfaisait aux mêmes hypothèses. Dans le premier cas, cet ensemble se trouvait être l'ensemble des cercles de rayon non supérieur

⁽¹⁾ P. MONTEL, Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications. Paris, Gauthier-Villars, 1927, p. 34.

⁽²⁾ P. MONTEL, Leçons sur les fonctions univalentes..., p. 33.

à ρ et intérieur à un domaine fini D ; dans le second cas, cet ensemble était l'ensemble des cercles de rayon ρ intérieurs à un domaine fini D .

Les hypothèses communes peuvent s'exprimer comme suit :

Considérons un ensemble \mathcal{E} de domaines finis; soit E l'ensemble des points intérieurs à un au moins des domaines de \mathcal{E} . Désignons par \mathcal{E}_1 un sous-ensemble quelconque de \mathcal{E} tel que l'ensemble de points E_1 correspondant soit complètement intérieur à E . On suppose alors que \mathcal{E} soit tel que tout ensemble limite fermée d'une suite de domaines d'un même \mathcal{E}_1 appartient à un même domaine fermé de \mathcal{E} .

Une fonction, holomorphe dans chacun des domaines de \mathcal{E} , sera dite univalente sur \mathcal{E} si elle est univalente dans chacun des domaines de \mathcal{E} . L'univalence stricte sur \mathcal{E} se définira d'une manière semblable. On peut alors démontrer des théorèmes analogues, mutatis mutandis, aux théorèmes indiqués à propos de l'univalence locale de module ρ et de l'univalence locale de rayon ρ .

CHAPITRE II

LES FAMILLES DE FONCTIONS ÉGALEMENT LOCALEMENT UNIVALENTES DANS LE CERCLE-UNITÉ ⁽¹⁾.

1. Considérons l'ensemble \mathcal{E}_ρ des fonctions $f(z)$ holomorphes et localement univalentes de même module ρ , ($0 < \rho \leq 1$), dans le cercle-unité. Désignons par E_ρ la sous-famille des fonctions de \mathcal{E}_ρ satisfaisant aux deux conditions

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \text{ } ^{(2)}.$$

M. Montel ⁽³⁾ a montré que E_ρ est une famille normale et bornée à l'intérieur du cercle-unité ⁽⁴⁾. E_ρ est de plus une famille fermée : Toute

⁽¹⁾ Une partie des résultats de ce chapitre a été indiquée dans ma note : Sur les fonctions localement univalentes dans le cercle-unité, *C. R. de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 206, 1938, pp. 413-415.

⁽²⁾ E_ρ est tel que toute fonction $\varphi(z)$ de E_ρ peut se mettre sous la forme

$$\varphi(z) = af(z) + b$$

où $f(z)$ appartient à E_ρ et où a , ($\neq 0$), et b ne dépendent pas de z .

⁽³⁾ P. MONTEL, *loc. cit.*, p. 60, cf. spécialement pp. 44, 45 et 48.

⁽⁴⁾ Cela résulte aussi des deux faits suivants ; 1°) E_ρ est une famille quasi-normale à l'intérieur du cercle-unité (cf. chapitre I, paragraphe 13) ; 2°) E_ρ est une famille normale et bornée à l'intérieur du cercle $|z| < \rho$ (cf. P. MONTEL, *Leçons sur les fonctions univalentes...*, p. 44).

fonction $f(z)$, limite unique dans le cercle-unité d'une suite de fonctions de E_ρ , est encore une fonction de E_ρ . En effet, $f(z)$ est alors limite d'une suite uniformément convergente à l'intérieur du cercle-unité de fonctions de E_ρ ; on a donc

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$$

et $f(z)$ n'est pas constante; alors, d'après le théorème IV du chapitre I, $f(z)$ est aussi localement univalente de module ρ dans le cercle-unité et $f(z)$ appartient donc à E_ρ .

Quel que soit n , la famille $E_\rho^{(n)}$ ⁽¹⁾ des dérivées d'ordre n des fonctions de E_ρ est aussi normale et bornée à l'intérieur du cercle-unité. Les modules des valeurs prises par les fonctions de $E_\rho^{(n)}$ sur la circonférence $|z| = r$, ($0 \leq r < 1$), ont donc une borne supérieure finie; désignons-la par $M_n(r, \rho)$.

Pour chaque valeur de l'indice n , $M_n(r, \rho)$ est une fonction de r et de ρ définie pour tout couple de valeurs de r et de ρ satisfaisant aux inégalités.

$$0 \leq r < 1, \quad 0 < \rho \leq 1 \text{ } ^{(2)}.$$

Les fonctions $M_n(r, \rho)$ jouissent de propriétés communes. Nous en indiquerons quelques-unes dans les paragraphes suivants ⁽³⁾.

2. THÉORÈME I. — Pour chaque valeur de ρ et chaque valeur de r , il existe dans E_ρ une fonction $f(z)$ satisfaisant à

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| = M_n(r, \rho)$$

Soient en effet r et ρ fixes. $M_n(r, \rho)$ est aussi la borne supérieure des quantités

$$\varphi(r) = \max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)|,$$

où $f(z)$ désigne une fonction quelconque de E_ρ . Alors, $M_n(r, \rho)$ est ou n'est pas la plus grande limite des quantités $\varphi(r)$, ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ Par extension, $E_\rho^{(0)}$ désignera la famille E_ρ , de telle sorte que l'indice n pourra prendre toute valeur entière, positive ou nulle.

⁽²⁾ Dans la suite, nous supposons toujours, sauf au paragraphe 5, que r et ρ satisfont à ces deux conditions.

⁽³⁾ Les démonstrations de plusieurs des théorèmes qui suivent ont déjà été publiées; nous ne les redonnons pas ici, à moins qu'elles ne nous soient utiles pour d'autres développements. (Cf. R. BALLIEU, Sur les familles de fonctions localement univalentes dans le cercle-unité, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, tome 58, série I, pp. 103-114.)

⁽⁴⁾ C'est-à dire qu'il existe toujours ou non, quelque petit que soit ϵ , un nombre infini de quantités $\varphi(r)$ différentes et supérieures à $M_n(r, \rho) - \epsilon$.

Dans le second cas, $M_n(r, \rho)$ est certainement égal à une de ces quantités. Dans le premier cas, il existe une suite de fonctions de E_ρ : $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_i(z)$, ..., telle que l'on ait

$$M_n(r, \rho) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\max_{|z|=r} |f_i^{(n)}(z)| \right].$$

Nous pouvons supposer que la suite de ces fonctions converge uniformément à l'intérieur du cercle-unité ; la fonction limite $f(z)$ appartient à E_ρ et l'on a

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\max_{|z|=r} |f_i^{(n)}(z)| \right] = M_n(r, \rho).$$

Le lemme est donc vrai dans les deux cas.

On peut d'ailleurs montrer que, sauf pour $M_0(0, \rho)$ et $M_1(0, \rho)$, le second cas n'a pas lieu ; à ces deux exceptions près, il existe toujours dans E_ρ , pour chaque r et pour chaque n , une suite de fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_i(z)$, ... telles que l'on ait effectivement

$$(1) \quad \max_{|z|=r} |f_i^{(n)}(z)| < M_n(r, \rho)$$

et aussi,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[\max_{|z|=r} |f_i^{(n)}(z)| \right] = M_n(r, \rho).$$

En effet, soit $f(z)$ une fonction de E_ρ satisfaisant à la condition

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| = M_n(r, \rho)$$

et soit $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots$, une suite croissante de nombres positifs tendant vers 1. Posons

$$f_i(z) = \frac{1}{k_i} f(k_i z).$$

On vérifie aisément que $f_i(z)$ appartient encore à E_ρ et converge uniformément vers $f(z)$ à l'intérieur du cercle-unité. On a donc déjà

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[\max_{|z|=r} |f_i^{(n)}(z)| \right] = \max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| = M_n(r, \rho).$$

De plus, la condition (1) est aussi remplie par les fonctions $f_i(z)$. On a en effet

1° Si $r = 0$ et $n \geq 2$,

$$|f_i^{(n)}(0)| = k_i^{n-1} |f^{(n)}(0)| < |f^{(n)}(0)|.$$

2° Si $r > 0$ et $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} f_i^{(n)}(z) &= k_i^{n-1} f^{(n)}(k_i z), \\ \max_{|z|=r} |f_i^{(n)}(z)| &= k_i^{n-1} \max_{|z|=r} |f^{(n)}(k_i z)| \\ &= k_i^{n-1} \max_{|z|=rk_i < r} |f^{(n)}(z)|; \end{aligned}$$

et donc, puisque $\max_{|z|=t} |f^{(n)}(z)|$ est fonction croissante de t ,

$$\max_{|z|=r} |f_i^{(n)}(z)| < k_i^{n-1} \max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| \leq \max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)|.$$

3° Si $r > 0$ et $n = 0$,

$$(2) \quad \max_{|z|=r} |f_i(z)| = \frac{1}{k_i} \max_{|z|=rk_i} |f(z)|.$$

Mais $f(z)$ est holomorphe dans $|z| = r$ et bornée supérieurement en module dans ce cercle par $M_0(r, \rho)$; de plus, $f(z)$ n'est pas identique à z puisque l'on a

$$\max_{|z|=r} |z| = r < r + \frac{1}{2} r^2 = \max_{|z|=r} |z + \frac{1}{2} z^2|$$

et que $(z + \frac{1}{2} z^2)$ appartient à E_1 , donc à E_p . Alors, comme $f(0)$ est nul, on a, en vertu du lemme de SCHWARZ,

$$|f(z)| < \frac{M_0(r, \rho)}{r} |z|, \quad (|z| < r),$$

et, par conséquent,

$$\max_{|z|=rk_i} |f(z)| < \frac{M_0(r, \rho)}{r} \cdot rk_i = k_i M_0(r, \rho).$$

Finalement, en vertu de (2), il vient

$$\max_{|z|=r} |f_i(z)| < M_0(r, \rho).$$

3. Lorsque ρ_1 est supérieur à ρ_2 , E_{ρ_1} est contenu dans E_{ρ_2} ; par conséquent pour r constant, $M_n(r, \rho)$ est fonction non croissante de ρ . Il est immédiat que pour ρ constant, $M_n(r, \rho)$ est fonction croissante de r . De plus, l'exemple de la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots + nz^n + \dots,$$

univalente dans le cercle-unité ⁽¹⁾ montre que même $M_n(0, \rho)$, ($n \geq 1$) est toujours positif. Nous avons ensuite

THÉORÈME II. — Pour r compris entre zéro et un et pour ρ constant, $\log M_n(r, \rho)$ est fonction convexe de $\log r$.

THÉORÈME III. — $M_n(r, \rho)$ est, pour ρ constant, fonction continue de r dans l'intervalle $(0, 1)$, fermé en $r = 0$, ouvert en $r = 1$.

Ces théorèmes ne font que traduire, pour le cas particulier de la famille $E_p^{(n)}$, des théorèmes valables pour une famille quelconque de fonctions holomorphes, normale et bornée à l'intérieur du cercle-unité.

Soit, en effet, \mathcal{E} une famille, normale et bornée à l'intérieur du cercle-unité, de fonctions $\varphi(z)$, holomorphes dans ce cercle. Les modules des valeurs prises par les fonctions de \mathcal{E} sur la circonférence $|z| = r$ ($0 \leq r < 1$) ont donc une borne supérieure finie ; désignons-la par $\mu(r)$. Il est immédiat que $\mu(r)$ est fonction non décroissante de r . Nous avons alors

THÉORÈME II'. — Pour r compris entre zéro et un, $\log \mu(r)$ est fonction convexe de $\log r$.

En effet, $\mu(r)$ peut aussi être considérée comme étant la borne supérieure des fonctions

$$\Phi(r) = \max_{|z|=r} |\varphi(z)|, \quad (0 \leq r < 1),$$

$\varphi(z)$ désignant une fonction quelconque de \mathcal{E} .

En vertu du théorème des trois cercles de M. Hadamard, $\log \Phi(r)$ est une fonction convexe de $\log r$ dans l'intervalle $0 < r < 1$; $\log \mu(r)$, qui dans cet intervalle est fini et borne supérieure de l'ensemble des fonctions $\Phi(r)$, est donc aussi dans cet intervalle fonction convexe de $\log r$.

Nous avons ensuite

THÉORÈME III'. — $\mu(r)$ est fonction continue de r dans l'intervalle $(0, 1)$, fermé en $r = 0$, ouvert en $r = 1$.

Cette propriété, pour l'intervalle $0 < r < 1$, résulte déjà du théorème précédent ; car $\log \mu(r)$, étant fonction convexe de $\log r$ dans cet intervalle, y est donc fonction continue de $\log r$ et donc aussi fonction continue de r . Il en est alors de même pour $\mu(r)$.

(1) Cf., par exemple, P. MONTEL, Leçons sur les fonctions univalentes..., p. 49.

On peut encore établir ce point et montrer que $\mu(r)$ est continue à droite de $r=0$ de la manière suivante

1° Soit r_0 ($0 \leq r_0 < 1$). Montrons que $\mu(r)$ est continue à droite de r_0 . Considérons pour cela une suite quelconque $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$ ($r_1 < 1$), décroissante et tendant vers r_0 . $\mu(r)$ est fonction non décroissante de r ; donc $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(r_i)$ existe. Désignons cette limite par λ . Nous savons déjà, par ce qui précède, que λ n'est certainement pas inférieur à $\mu(r_0)$. Montrons que λ est égal à cette dernière quantité.

Pour cela, donnons-nous arbitrairement une suite $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i, \dots$ de quantités positives, décroissantes et tendant vers zéro. Par définition de $\mu(r)$, il existe dans \mathcal{E} , pour chaque valeur de l'indice i une fonction $\varphi_i(z)$ satisfaisant à

$$(1) \quad \mu(r_i) - \eta_i < \max_{|z|=r_i} |\varphi_i(z)| \leq \mu(r_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

\mathcal{E} étant une famille normale, nous pouvons extraire de la suite des fonctions $\varphi_i(z)$, une suite partielle convergeant uniformément à l'intérieur du cercle-unité vers une fonction holomorphe $\Psi(z)$. Nous continuons à désigner les termes de cette suite et ceux de la suite des η correspondants par $\varphi_i(z)$ et η_i .

Comme nous avons par hypothèse

$$\max_{|z|=r_0} |\varphi_i(z)| \leq \mu(r_0), \quad i = 1, 2, \dots,$$

nous avons de même

$$\max_{|z|=r_0} |\Psi(z)| \leq \mu(r_0).$$

Par conséquent, ϵ désignant un nombre positif arbitraire, nous avons, si δ positif est suffisamment petit,

$$(2) \quad \max_{|z| \leq r_0 + \delta} |\Psi(z)| \leq \mu(r_0) + \epsilon, \quad (r_0 + \delta < 1).$$

Dans le cercle $|z| \leq r_0 + \delta$, nous avons aussi à partir d'une certaine valeur i_0 de i ,

$$|\varphi_i(z) - \Psi(z)| < \epsilon;$$

d'où il résulte en vertu de (2),

$$(3) \quad \max_{|z| \leq r_0 + \delta} |\varphi_i(z)| \leq \mu(r_0) + 2\epsilon, \quad (i > i_0).$$

Prenons alors i_1 plus grand que i_0 et tel que pour tout i supérieur à i_0 , nous ayons

$$r_i - r_0 < \delta, \quad \eta_i < \epsilon.$$

En tenant compte de ces conditions et des inégalités (1) et (3), nous obtenons l'inégalité

$$\mu(r_i) \leq \mu(r_0) + 3\epsilon, \quad (i > i_1).$$

Finalement, nous pouvons écrire

$$\mu(r_0) \leq \lambda \leq \mu(r_0) + 3\epsilon;$$

ϵ étant arbitraire, λ est bien égal à $\mu(r_0)$. Par conséquent, $\mu(r)$ est continue à droite par rapport à r pour $0 \leq r < 1$.

2° Soit $r_0 (0 < r_0 < 1)$; $\mu(r)$ est continue à gauche de r_0 . En effet, soit ϵ un nombre positif arbitraire. Il existe dans \mathcal{E} une fonction $\varphi(z)$ satisfaisant à

$$(4) \quad \mu(r_0) - \epsilon \leq \max_{|z|=r_0} |\varphi(z)| \leq \mu(r_0).$$

Or, $\max_{|z|=r} |\varphi(z)|$ est fonction continue de r ; d'autre part, nous pouvons écrire

$$(5) \quad \max_{|z|=r < r_0} |\varphi(z)| \leq \mu(r) \leq \mu(r_0).$$

Faisons tendre en croissant r vers r_0 ; $\mu(r)$ tend vers une limite λ' et il vient, à cause de (4) et de (5)

$$\mu(r_0) - \epsilon \leq \lambda' \leq \mu(r_0).$$

ϵ étant arbitraire, il en résulte que $\lambda' = \mu(r_0)$. Par conséquent, $\mu(r)$ est continue à gauche par rapport à r pour $0 < r < 1$. Le théorème est ainsi complètement démontré.

Les théorèmes II' et III' entraînent les théorèmes II et III comme corollaires.

4. On peut également montrer que, pour r constant, $M_n(r, \rho)$ est fonction continue de ρ dans l'intervalle $(0, 1)$ ouvert en $r=0$, fermé en $r=1$. La démonstration de ce fait utilise le lemme suivant :

LEMME IV. — La fonction $M_n(r, \rho)$ satisfait à l'inégalité

$$(1) \quad \rho_1^{n-1} M_n(r, \rho_1) \leq \rho_2^{n-1} M_n(r, \rho_2)$$

dès que l'on a

$$\rho_1 \leq \rho_2.$$

REMARQUE. — Faisons $r=0$ dans (1); il vient

$$(1') \quad \rho_1^{n-1} M_n(0, \rho_1) \leq \rho_2^{n-1} M_n(0, \rho_2), \quad (\rho_1 \leq \rho_2),$$

ce qui nous donne une inégalité entre la borne supérieure des modules des coefficients de z^n dans les développements en puissance de z d'une

fonction quelconque de E_{ρ_1} et d'une fonction quelconque de E_{ρ_2} . Il résulte de (1') que l'ordre d'infinitude de $M_n(0, \rho)$, pour ρ tendant vers zéro, est au plus égal à $(n - 1)$. Il faut remarquer qu'en fait, $M_n(0, \rho)$, $(n > 1)$ augmente indéfiniment quand ρ tend vers zéro. En effet, considérons la fonction

$$f_m(z) = \frac{(z + 3)^m - 3^m}{3^{m-1} \cdot m}.$$

Nous avons $f_m(0) = 0$, $f'_m(0) = 1$. De plus, nous avons dans le cercle-unité fermé $|z| \leq 1$

$$\left| f'_m(z) \right| = \left| \frac{z + 3}{3} \right|^{m-1} \geq \left| \frac{2}{3} \right|^{m-1}.$$

Il en résulte que $f_m(z)$ est localement univalente de module fini dans $|z| < 1$. Or

$$f_m(z) = z + \frac{C_m^2}{3^m} z^2 + \dots + \frac{C_m^n}{3^{n-1} m} z^n + \dots + \frac{1}{3^{m-1} m} z^m.$$

Gardons n , $(n > 1)$, fixe et faisons croître m indéfiniment à partir de n ; le coefficient de z^n dans $f_m(z)$ tend vers l'infini avec m . Nous en concluons que le module maximum d'univalence locale de $f(z)$ dans le cercle-unité tend vers zéro avec $(1 : m)$ et que $M_n(0, \rho)$, $(n > 1)$, augmente indéfiniment avec $(1 : \rho)$.

Si dans l'égalité (1), nous remplaçons $r\rho_1$ par r ou $r\rho_2$ par r , nous obtenons deux nouvelles inégalités qui, jointes à la propriété de $M_n(r, \rho)$ d'être non décroissante en ρ , conduisent au théorème :

THÉORÈME V. — $M_n(r, \rho)$ est, pour r constant, fonction continue de ρ dans l'intervalle $(0, 1)$, ouvert en $\rho = 0$, fermé en $\rho = 1$.

Grâce à un résultat dû à M. Kritikos, les théorèmes II et V permettent de conclure que

THÉORÈME VI. — $M_n(r, \rho)$ est continue sur l'ensemble du plan des (r, ρ) défini par les inégalités

$$0 < r < 1, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

5. Soit, plus généralement, \mathcal{E}_ρ une famille, normale et bornée à l'intérieur du cercle-unité, de fonctions holomorphes dans ce cercle; \mathcal{E}_ρ est de plus supposée dépendre d'un paramètre réel variable, par exemple, dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$.

Définissons à partir de \mathcal{E}_ρ les fonctions $\mathcal{M}_n(r, \rho)$, comme les fonctions $M_n(r, \rho)$ l'étaient à partir de E_ρ , et supposons que les familles \mathcal{E}_ρ satisfont à la condition :

Quel que soit ρ_1 inférieur à ρ_2 , \mathcal{E}_{ρ_1} contient \mathcal{E}_{ρ_2} , et si la fonction $f(z)$ appartient à \mathcal{E}_{ρ_1} , la fonction $\frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} z \right)$ appartient à \mathcal{E}_{ρ_2} . Les familles \mathcal{E}_ρ satisfont à cette condition ⁽¹⁾.

Alors, les fonctions $\mathcal{M}_n(r, \rho)$, qui sont définies pour les valeurs de r et de ρ satisfaisant à

$$(1) \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 < \rho < 1,$$

jouissent, pour ces valeurs, des propriétés indiquées aux paragraphes 3 et 4 pour les fonctions $M_n(r, \rho)$, exception faite de la propriété pour $M_n(0, \rho)$ d'être positif.

Il est déjà clair que les propriétés du paragraphe 3 s'étendent aux fonctions $\mathcal{M}_n(r, \rho)$. Quant à celles du paragraphe 4, elles découlent de celles du paragraphe 3 et du lemme IV. Il nous suffit donc de démontrer le lemme IV pour $\mathcal{M}_n(r, \rho)$. Donnons-nous $r, \rho_1, \rho_2, (\rho_1 < \rho_2)$, fixes mais quelconques et satisfaisant à (1). Prenons ensuite un ϵ positif arbitraire ; il existe dans \mathcal{E}_{ρ_1} une fonction $f(z)$ telle que nous ayons

$$(2) \quad \max_{|z| = r\rho_1} |f^{(n)}(z)| \geq \mathcal{M}_n(r\rho_1, \rho_1) - \epsilon.$$

Posons

$$F(z) = \frac{\rho_2}{\rho_1} f\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} z\right).$$

$F(z)$ appartient à \mathcal{E}_{ρ_2} ; nous avons donc

$$(3) \quad \max_{|z| = r\rho_2} |F^{(n)}(z)| \leq \mathcal{M}_n(r\rho_2, \rho_2),$$

et, par un calcul facile ⁽¹⁾

$$(4) \quad \max_{|z| = r\rho_2} |F^{(n)}(z)| = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{n-1} \max_{|z| = r\rho_1} |f^{(n)}(z)|;$$

de (4), nous tirons en tenant compte de (2) et de (3),

$$\rho_1^{n-1} [\mathcal{M}_n(r\rho_1, \rho_1) - \epsilon] \leq \rho_2^{n-1} \mathcal{M}_n(r\rho_2, \rho_2);$$

ϵ étant arbitraire, ce dernier résultat montre que le lemme IV vaut pour les fonctions $\mathcal{M}_n(r, \rho)$.

⁽¹⁾ Cf. R. BALLIEU, *loc. cit.*, p. 79.

6. Revenons aux familles E_p . Nous avons démontré dans l'article déjà cité que

THÉOREME VII. — Quel que soit n supérieur ou égal à 1, toute fonction $f(z)$ de E_p satisfait à l'inégalité

$$(1) \quad |f^{(n)}(z)| \leq k^{n-1} M_n(0, kp) |f'(z)|$$

pour tout z et tout k satisfaisant à

$$|z| \leq 1 - p, \quad p \leq \frac{1}{k} \leq 1 - |z|.$$

Ce théorème s'étend à toute fonction $f(z)$ holomorphe et localement univalente de module p dans le cercle-unité, car une telle fonction peut toujours se mettre sous la forme

$$f(z) = a \varphi(z) + b,$$

où $\varphi(z)$ appartient à E_p et où a et b ne dépendent pas de z , a étant de plus non nul ; il est immédiat alors que l'inégalité (1), valable pour $\varphi(z)$, l'est aussi pour $f(z)$.

COROLLAIRE. — Pour tout r et tout k satisfaisant à

$$0 \leq r \leq 1 - p, \quad p \leq \frac{1}{k} \leq 1 - r,$$

on a, quel que soit n supérieur ou égal à 1, l'inégalité

$$M_n(r, p) \leq k^{n-1} M_n(0, kp) M_1(r, p).$$

En effet, la borne supérieure, pour l'ensemble des fonctions de E_p , du premier membre de (1) sur la circonférence $|z| = r \leq 1 - p$ est certainement non supérieure à la borne supérieure, dans les mêmes conditions, du second membre de (1).

Le théorème VII montre en particulier, en y faisant $k = 1 : p$ et $n = 2$, que pour toute fonction $f(z)$ de E_p , on a

$$(2) \quad \left| f''(z) \right| \leq \frac{4}{p} \left| f'(z) \right|, \quad (|z| \leq 1 - p),$$

car il résulte d'un théorème de M. Bieberbach ⁽¹⁾ que $M_2(0, 1) = 4$.

En vertu du théorème I du chapitre I, $f'(z)$ ne s'annule pas dans le cercle-unité. La fonction $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ est donc holomorphe dans ce cercle et vérifie l'inégalité

$$(3) \quad \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{4}{p}, \quad (|z| \leq 1 - p).$$

⁽¹⁾ L. BIEBERBACH, Lehrbuch der Funktionentheorie, t. II, Berlin, Teubner, 1931, p. 74.

Lorsque ρ est égal à un, l'égalité peut avoir lieu dans (3), ⁽¹⁾, tandis que, comme nous allons le voir, si ρ est inférieur à un, elle ne peut avoir lieu en aucun point z de module $(1 - \rho)$ et pour aucune fonction de E_ρ ⁽²⁾.

En effet, soit $f(z)$ une fonction de E_ρ , $(0 < \rho < 1)$, pour laquelle l'égalité aurait lieu dans (3) en un point z_0 de module $(1 - \rho)$. Il en résulte ⁽³⁾ que $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = f(z_0) + \rho^2 f'(z_0) \frac{z + (\rho - 1) e^{-i\Psi}}{(1 - z e^{i\Psi})^2};$$

Ψ étant une certaine constante réelle. Nous en déduisons l'expression de $f'(z)$

$$f'(z) = \rho^2 f'(z_0) e^{i\Psi} \frac{z + (1 - 2\rho) e^{-i\Psi}}{(1 - z e^{i\Psi})^3}.$$

Le point $(1 - 2\rho) e^{-i\Psi}$ est donc un zéro de $f'(z)$; il est intérieur au cercle-unité puisque ρ est compris entre zéro et un; or, comme nous l'avons rappelé il y a un instant, $f(z)$ appartenant à E_ρ , sa dérivée $f'(z)$ ne peut s'annuler dans le cercle-unité. Nous aboutissons donc à une contradiction.

Par conséquent, à chaque fonction $f(z)$ de E_ρ , $(\rho < 1)$, correspond un nombre positif δ tel que l'on ait

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{4}{\rho} - \delta, \quad (|z| \leq 1 - \rho),$$

l'égalité ayant lieu en un point de module $(1 - \rho)$.

La borne inférieure $\Delta(\rho)$ de l'ensemble des δ correspondant aux fonctions de E_ρ est positive, car si $\Delta(\rho)$ était nul, zéro serait la plus petite limite des δ et il existerait une suite $f_1(z), f_2(z), \dots, f_i(z), \dots$ de fonctions de E_ρ telle que le δ_i correspondant à $f_i(z)$ aurait pour limite zéro.

Nous pouvons supposer, sans introduire par là de restrictions puisque la famille E_ρ est normale et fermée, que la suite des $f_i(z)$ converge uniformément à l'intérieur du cercle-unité vers une fonction $f(z)$ de E_ρ . Comme les dérivées $f'_i(z)$ et $f''_i(z)$ ne s'annulent pas dans le cercle-unité, l'ensemble des dérivées $f'_i(z)$ est, dans tout domaine complètement intérieur au cercle-unité, borné inférieurement en module par un nombre positif. Alors, la fonction

$$\varphi_i(z) = \frac{f''_i(z)}{f'_i(z)},$$

(1) Voir note de la page précédente.

(2) Donc, à fortiori, en aucun point z de module inférieur à $(1 - \rho)$.

(3) Cf. R. BALLIEU, *loc. cit.*, p. 79.

holomorphe dans le cercle-unité, converge uniformément à l'intérieur de ce cercle vers la fonction

$$\varphi(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

Or, il existe un nombre positif δ tel que

$$|\varphi(z)| \leq \frac{4}{\rho} - \delta, \quad (|z| \leq 1 - \rho < 1).$$

Donc, pour i assez grand, nous aurons aussi

$$|\varphi_i(z)| < \frac{4}{\rho} - \frac{\delta}{2} \quad (|z| \leq 1 - \rho).$$

Nous avons donc, pour i assez grand, $\delta_i > \frac{\delta}{2}$ et δ ne peut tendre vers zéro. Nous pouvons alors énoncer le théorème.

THÉORÈME VIII. — Il existe un nombre $\Delta(\rho)$, positif pour ρ plus petit que 1, nul pour ρ égal à 1, tel que toute fonction $f(z)$ de E_ρ , ($0 < \rho \leq 1$) satisfasse à l'inégalité.

$$(4) \quad \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{4}{\rho} - \Delta(\rho)$$

lorsque z est de module non supérieur à $(1 - \rho)$.

REMARQUES. — I. Le théorème VIII vaut pour toute fonction holomorphe et localement univalente de module ρ , ($0 < \rho < 1$), dans le cercle-unité (cf. la remarque analogue pour le théorème VII).

II. Il existe au moins une fonction de E_ρ pour laquelle l'égalité ait lieu dans (4) en un point de module $(1 - \rho)$; cela résulte à nouveau du fait que E_ρ est une famille normale et fermée.

III. Posons

$$\varphi(\rho) = \frac{4}{\rho} - \Delta(\rho)$$

$\varphi(\rho)$, définie pour les valeurs de ρ satisfaisant à

$$0 < \rho \leq 1,$$

est fonction non croissante de ρ . En effet, pour ρ_2 supérieur à ρ_1 , E_{ρ_2} est contenu dans E_{ρ_1} ; nous avons donc, pour toute fonction $f(z)$ de E_{ρ_2} ,

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \varphi(\rho_1)$$

lorsque z est de module non supérieur à $(1 - \rho_1)$ et donc, à fortiori, lors-

que z est de module non supérieur à $(1 - \rho_2)$. Mais alors, la remarque II, par exemple, nous permet de conclure que

$$\varphi(\rho_2) \leq \varphi(\rho_1).$$

Comme nous le savons, $\varphi(1)$ égale 4 ; nous avons donc

$$\varphi(\rho) \geq 4, \quad \Delta(\rho) \leq 4 \frac{1-\rho}{\rho}.$$

IV. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe et localement univalente de module ρ , ($0 < \rho < 1$), dans le cercle-unité. Si θ est un nombre réel compris entre ρ et 1 (limites atteintes), la fonction

$$f_1(z) = f(\theta z)$$

est holomorphe et localement univalente de module $(\rho : \theta)$ dans le cercle-unité. Nous avons donc (Remarque I)

$$\left| \frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} \right| \leq \frac{4\theta}{\rho} - \Delta\left(\frac{\rho}{\theta}\right), \quad (|z| \leq 1 - \frac{\rho}{\theta}).$$

En revenant à la fonction $f(z)$, nous en déduisons l'inégalité

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{4}{\rho} - \frac{1}{\theta} \Delta\left(\frac{\rho}{\theta}\right),$$

valable pour θ compris entre ρ et un et pour z de module non supérieur à $(\theta - \rho)$.

CHAPITRE III

LES DOMAINES $d(r)$, $D(r)$, $\Delta(r)$.

1. Nous avons reconnu aux paragraphes 11 et 13 du chapitre I l'intérêt que présentent, au point de vue de l'univalence locale, 1° les domaines dont tout point à distance finie est intérieur à un cercle de rayon fixe intérieur au domaine, 2° les domaines tels qu'un cercle quelconque intérieur est, soit de rayon supérieur à un nombre fixe, soit intérieur à un cercle intérieur au domaine et de rayon égal à ce nombre fixe. Dans le présent chapitre, nous étudierons quelques propriétés des domaines de ces deux catégories ; nous considérerons aussi les domaines dont tout point frontière à distance finie est aussi point frontière d'un cercle de rayon fixe intérieur au domaine.

2. Nous désignerons donc, r étant un nombre positif quelconque, 1° par $d(r)$, un domaine tel que par chacun de ses points frontières à

distance finie passe une circonférence de rayon r limitant un cercle intérieur au domaine ;

2° par $D(r)$, un domaine dont tout point à distance finie est intérieur à un cercle de rayon r intérieur lui-même au domaine ⁽¹⁾ ;

3° par $\Delta(r)$, un domaine tel que tout cercle intérieur au domaine et de rayon inférieur à r soit intérieur à un cercle de rayon r intérieur lui-même au domaine.

Pour un même nombre positif r , les trois catégories de domaines ainsi définies ne sont jamais identiques. En effet, considérons le domaine obtenu par la réunion de deux cercles de rayon r , distincts mais empiétant. Ce domaine est un $D(r)$ mais n'est pas un $\Delta(r)$. Si l'on enlève au plan tout entier deux segments constituant deux côtés parallèles d'un carré de côté r , on obtient un $d(r)$ qui n'est pas un $D(r)$.

Par contre, tout $D(r)$ est un $d(r)$ pour la même valeur de r ; et tout $\Delta(r)$ est un $D(r)$, donc un $d(r)$, pour la même valeur de r .

En effet soit un $D(r)$ et soit M un point frontière de $D(r)$, à distance finie ; M est limite d'une suite de points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, de $D(r)$; chaque P_n est intérieur à un cercle C_n de rayon r intérieur à $D(r)$. Si la suite des C_n ne renferme qu'un nombre fini de cercles différents, M est point frontière de l'un d'eux, car P_n tend vers M . Si la suite de C_n renferme une infinité de cercles différents, nous pouvons en extraire une suite partielle admettant un cercle limite ouvert C , nécessairement de rayon r et intérieur à $D(r)$; comme P_n tend vers M , M appartient encore à la circonférence de C . Donc $D(r)$ est bien un $d(r)$.

Il est immédiat que tout $\Delta(r)$ est un $D(r)$, car tout point de $\Delta(r)$, à distance finie, est centre d'un cercle intérieur à $\Delta(r)$ et de rayon plus petit que r .

Ainsi, pour une même valeur de r , la classe des $\Delta(r)$ est une sous-classe propre de la classe des $D(r)$, elle-même sous-classe propre de la classe des $d(r)$.

Remarquons aussi que tout $d(r)$, $D(r)$, $\Delta(r)$, est un $d(r')$, $D(r')$, $\Delta(r')$ pour tout r' positif non supérieur à r .

3. Étant donnés 1° un domaine quelconque D , 2° un point frontière M de D à distance finie, 3° un nombre positif p , nous désignerons : a) par

(1) Sur des domaines analogues dans l'espace à trois dimensions, cfr. : BOULIGAND Georges, Introduction à la géométrie infinitésimale directe. Vuibert. Paris 1932, p. 91-106 ; DURAND Georges, Sur une généralisation des surfaces convexes, *Journal des Mathématiques pures et appliquées*, 9^e s., t. 10, 1931, p. 335-414 ; CHAMARD Lucien, Sur les propriétés de la distance à un ensemble ponctuel, *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 3^e s., t. 19, 1933.

$e(M, \rho)$ l'ensemble, pouvant être vide, des circonférences de rayon ρ passant par M et limitant un cercle intérieur à D ; $b)$ par $E(M, \rho)$, l'ensemble des cercles dont la circonférence appartient à $e(M, \rho)$; $c)$ par $\tilde{e}(M, \rho)$ l'ensemble des demi-droites issues de M et joignant M aux centres des circonférences de $e(M, \rho)$. Si D est un $d(r)$ et si ρ est plus petit ou égal à r , les ensembles ainsi définis sont certainement non vides.

LEMME I. — Soit un domaine $d(r)$ et soit M un point frontière de $d(r)$, à distance finie. A tout nombre positif ϵ correspond un nombre positif η tel que tout cercle de rayon r intérieur à $d(r)$ et renfermant un point distant de M de moins que η , a son centre à distance plus petite que ϵ de l'ensemble des centres des circonférences de $e(M, r)$.

Dans le cas contraire, en effet, il existerait, pour au moins un nombre positif ϵ , une suite de cercles C_n , de rayon r et intérieurs à $d(r)$, telle que C_n renferme un point P_n distant de M de moins de $(1 : n)$ et que le centre de C_n soit distant d'au moins ϵ de l'ensemble des centres des circonférences de $e(M, r)$. Nous pouvons supposer que la suite des C_n admet un seul cercle limite ouvert C , nécessairement de rayon r et intérieur à $d(r)$. Comme M est non intérieur à C_n et que P_n tend vers M , M appartient à la circonférence c de C , de sorte que c fait partie de $e(M, r)$, ce qui est impossible, puisque le centre de c est, comme les centres des C_n , distant d'au moins ϵ de l'ensemble des centres des circonférences de $e(M, r)$.

LEMME II. — S'il existe un angle φ de sommet M auquel tous les cercles de $E(M, r)$ soient extérieurs, à tout angle Ψ de sommet M , intérieur — côtés compris — à φ , correspond un nombre positif η tel que tout cercle de rayon r intérieur à $d(r)$ et renfermant un point distant de M de moins que η , soit extérieur à l'angle Ψ .

En effet, en tenant compte que M n'est intérieur à aucun cercle intérieur à $d(r)$, on voit qu'il existe un nombre ϵ_0 tel que tout cercle de rayon r intérieur à $d(r)$ et ayant un point dans Ψ a son centre à distance plus grande que ϵ_0 de l'ensemble des centres des circonférences de $e(M, r)$. Le lemme I entraîne alors le lemme II comme corollaire.

4. Considérons maintenant un domaine $d(r)$ et soit M un point frontière de $d(r)$, non isolé et à distance finie. La frontière F de $d(r)$ admet en M au moins une demi-tangente ⁽¹⁾. MT est tangente en M à une circonférence de $e(M, r)$.

(1) Étant donné un point M à distance finie et un ensemble E admettant M comme point limite, nous dirons, avec M. Bouligand, que toute position limite d'une demi-droite issue

Supposons en effet que MT ne soit tangente à aucune circonférence de $e(M, r)$. MT ne pénètre dans aucun cercle de $E(M, r)$, sinon elle ne pourrait être tangente en M à F . Comme de plus, $E(M, r)$ est un ensemble fermé ⁽¹⁾, il résulte de là qu'il existe un angle ω , 1° de sommet M , 2° de bissectrice intérieure MT , 3° intérieur, côtés compris, à un angle ω' de sommet M auquel tous les cercles de $E(M, r)$ sont intérieurs. Alors, si le nombre positif η correspond à ω conformément au lemme II, le secteur circulaire de centre M et de rayon η compris dans l'angle ω ne renferme, à part le point M , aucun point frontière de $d(r)$, car par chaque point frontière de $d(r)$ passe une circonférence limitant un cercle de rayon r intérieur à $d(r)$. Mais alors, MT ne peut être une demi-tangente à F en M .

Nous pouvons déduire de ce résultat le théorème.

THÉORÈME III. — La frontière F d'un domaine $d(r)$ a, en chacun de ses points M , non isolé et à distance finie, au plus deux demi-tangentes, chacune d'elles étant tangente en M à la circonférence d'un cercle de rayon r intérieur à $d(r)$.

Nous avons déjà établi que toute demi-tangente à F en M est tangente à une circonférence de $e(M, r)$.

Considérons maintenant trois demi-droites quelconques MA , MB , MC , issues de M ; montrons qu'elles ne sont jamais toutes trois demi-tangentes à F en M . Le théorème sera alors établi. Deux au moins des trois angles AMB , BMC , CMA ⁽²⁾ sont d'ouverture moindre que deux droits; supposons qu'il en soit ainsi pour les angles AMB et BMC . Alors MA et MC sont de part et d'autre de la droite qui porte MB . Or si MB est demi-tangente à F en M , il existe un cercle de $E(M, r)$ dont la circonférence est tangente en M à MB ; une des demi-droites MA et MC pénètre dans ce cercle et ne peut donc être une demi-tangente. Par conséquent, ou bien MB n'est pas une demi-tangente à F en M ou bien MA et MC ne sont pas toutes deux demi-tangentes à F en M ⁽³⁾.

C. Q. F. D.

On aurait aussi pu raisonner comme suit. Il existe en M , supposé satisfaire aux conditions de l'énoncé, au moins une demi-tangente MT à F . Cette

de M et joignant M à un point M' de E tendant vers M , est une demi-tangente à E en M . Une condition nécessaire et suffisante pour que la demi-droite MT soit une demi-tangente en M à E est que tout angle de sommet M et contenant MT renferme une suite de points de E tendant vers M .

⁽¹⁾ C'est-à-dire que tout cercle limite ouvert d'une suite de cercles de $E(M, r)$ appartient encore à $E(M, r)$.

⁽²⁾ Ces angles sont pris de façon que chacun d'eux ne renferme pas la troisième demi-droite.

⁽³⁾ La marche de cette démonstration m'a été indiquée par M. de la Vallée Poussin.

demi-tangente ne pouvant pénétrer dans aucun cercle de $E(M, r)$, l'ensemble $\mathcal{E}(M, r)$ est tout entier situé dans celui des deux demi-plans fermés, limités par la perpendiculaire en M à MT , qui ne renferme pas MT . L'ensemble $\mathcal{E}(M, r)$ peut donc être enfermé dans un plus petit angle φ de sommet M ; l'ouverture α de φ n'est pas supérieure à deux droits. Comme cas extrême ($\alpha = 0$), φ peut se réduire, en même temps que $\mathcal{E}(M, r)$, à une demi-droite. L'ouverture α de φ est égale à deux droits si et seulement si $E(M, r)$ contient deux cercles de centres opposés par rapport à M .

Considérons les angles formés par les demi-perpendiculaires en M aux côtés de φ ; désignons par Ψ celui de ces angles ne renfermant pas φ et d'ouverture β égale au supplément de α (β est nul, et Ψ se réduit à une demi-droite, lorsque α est égal à deux droits). On voit que Ψ est le plus grand angle de sommet M auquel tous les cercles de $E(M, r)$ soient extérieurs et que chacun des côtés de Ψ est tangent en M à une circonférence de $e(M, r)$.

Si β est nul, $E(M, r)$ renferme deux cercles dont les circonférences sont tangentes en M ; les demi-tangentes communes à ces deux circonférences sont évidemment les seules demi-tangentes possibles à F en M .

Si β n'est pas nul, une demi-droite quelconque issue de M et non comprise dans Ψ pénètre dans un cercle de $E(M, r)$, en particulier dans un cercle dont la circonférence est tangente en M à un des côtés de Ψ , cette demi-droite ne peut donc être une demi-tangente à F en M . Le lemme II montre qu'une demi-droite issue de M et intérieure à Ψ ne peut-être demi-tangente à F en M . Donc, les côtés de Ψ — dont chacun est, comme nous l'avons vu, tangent en M à une circonférence de $e(M, r)$ — constituent les seules demi-tangentes possibles à F en M ⁽¹⁾.

REMARQUES. — I. Si F a en M deux demi-tangentes, il résulte des considérations antérieures que tout rayon de $\mathcal{E}(M, r)$ fait avec chacune de ces deux demi-tangentes un angle non inférieur à un droit.

II. Lorsque l'angle Ψ n'est pas nul, les deux côtés de cet angle ne sont pas nécessairement tous deux des demi-tangentes à F en M . (Un au moins l'est puisque F a certainement une demi-tangente en M , non isolé et à distance finie). Ainsi, pour le $d(r)$ donné en exemple au § 2, en une

⁽¹⁾ Le fait que $d(r)$ soit connexe ne joue aucun rôle dans la démonstration et le résultat est valable pour un ensemble ouvert E tel que chaque point frontière de E , à distance finie, soit aussi point frontière d'un cercle de rayon fixe intérieur à E . Par conséquent, un ensemble fini F quelconque, par chaque point duquel on peut tracer une circonférence ne renfermant à son intérieur aucun point de F , a en chacun de ses points au plus deux demi-tangentes.

extrémité d'un des segments constituant la frontière F de $d(r)$, F a une seule demi-tangente alors qu'en ce point l'angle Ψ n'est pas nul.

III. Si F a en M une seule demi-tangente MT_1 , soit $\delta_1(\alpha)$, l'angle de sommet M , d'ouverture α et de bissectrice MT_1 ; si F a en M deux demi-tangentes MT_1 et MT_2 , soient $\delta_1(\alpha)$ et $\delta_2(\alpha)$ les angles semblablement définis et de bissectrices intérieures respectives MT_1 et MT_2 . A chaque α positif correspond un η positif tel que tout point frontière de $d(r)$ dont la distance à M est inférieure à η se trouve dans le ou dans les angles ainsi définis.

5. Considérons maintenant un domaine $D(r)$ quelconque. Les résultats précédents s'appliquent à $D(r)$ en vertu du paragraphe 2.

Cette fois, les deux côtés de l'angle Ψ , — supposé non nul, — correspondant à un point frontière M , non isolé et à distance finie, sont nécessairement tous deux des demi-tangentes en M à la frontière F de $D(r)$. En effet, soit Ψ' un angle de sommet M et intérieur, côtés compris, à Ψ . En vertu du lemme II, aucun cercle de rayon r intérieur à $D(r)$ ne pénètre dans un certain secteur circulaire de sommet M , d'angle Ψ' et de rayon η_0 . Les points intérieurs de ce secteur sont donc tous extérieurs à $D(r)$. D'autre part, un secteur circulaire d'angle opposé à Ψ' et de rayon η_1 suffisamment petit ne renferme que des points intérieurs à $D(r)$. Sur toute circonférence de centre M et de rayon η inférieur à η_0 et à η_1 , il existe donc deux points frontières de $D(r)$ dont le plus petit écart angulaire par rapport à M ne tend pas vers zéro avec η . Par conséquent, F a en M au moins deux, donc exactement deux, demi-tangentes.

Si M n'est pas limite de points extérieurs, F a en M une seule demi-tangente ou deux demi-tangentes opposées. Car, on voit par ce qui précède que l'angle Ψ' ne peut pas exister, c'est-à-dire que l'ouverture β de l'angle Ψ est nulle, et nous savons que notre affirmation est vraie dans ce cas.

6. Les théorèmes de ce paragraphe et du paragraphe suivant vont nous fournir, par l'étude de l'intersection de la frontière F d'un domaine $D(r)$ avec des circonférences centrées en un point quelconque de F , des indications sur la structure de F au voisinage de chacun de ses points. On a ainsi

THÉORÈME IV. — Considérons un point M , non isolé et à distance finie, de la frontière F d'un domaine $D(r)$. A tout angle δ de sommet M , d'ouverture non supérieure à deux droits et renfermant dans son intérieur au moins une demi-tangente à F en M , correspond un nombre positif ϵ_0 tel que, quel que soit ϵ positif et inférieur à ϵ_0 , il n'existe plus dans δ d'arcs de circonférence ouverts de centre M et de rayon ϵ , intérieurs

à $D(r)$ et dont les extrémités soient toutes deux des points frontières de $D(r)$.

Remarquons d'abord que si F a en M deux demi-tangentes et que δ fermé les contienne toutes deux, ces demi-tangentes font entre elles un angle non nul inférieur à deux droits car l'une d'elles est par hypothèse intérieure à δ ; l'angle Ψ , considéré au § 4, n'est donc pas nul en M ; alors, d'après ce qui a été dit au début du § 5, une demi-droite quelconque MN , menée dans Ψ , est telle qu'aux environs de M chacun de ses points, distinct de M , est extérieur à $D(r)$. Cela permet de se ramener, pour la démonstration, au cas où δ fermé ne renferme qu'une demi-tangente à F en M . La remarque III du § 4 permet alors de se ramener au cas où chacun des côtés de δ fait un angle inférieur à un droit avec la demi-tangente MT_1 contenue dans δ . Supposons qu'il en soit ainsi.

Si alors le théorème n'est pas vrai, il existe une suite décroissante et tendant vers zéro de nombres positifs $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, \dots$ tels que à ϵ_n corresponde un arc circulaire ouvert γ_n de centre M et de rayon ϵ_n intérieur à δ et à $D(r)$, les extrémités P'_n et P''_n de γ_n étant toutes deux des points de F . Prenons à l'intérieur de γ_n un point P_n . Ce point est intérieur à $D(r)$ et donc intérieur à un cercle C_n de rayon r intérieur lui-même à $D(r)$. La circonférence c_n du cercle C_n coupe Γ_n en deux points. Le centre de C_n se trouve sur la droite joignant le point M (centre de γ_n) au point milieu du segment rectiligne joignant les points d'intersection de c_n et de Γ_n ; ce point milieu est dans δ , donc le centre de C_n est dans δ ou dans l'opposé de δ . Mais le centre de C_n ne peut être dans l'opposé de δ car alors M serait intérieur à C_n . Donc le centre de C_n est dans δ , nécessairement à distance non inférieure à r du point M .

Tout cercle limite ouvert C , nécessairement de rayon r et intérieur à $D(r)$, de la suite des cercles C_n appartient à $E(M, r)$, puisque P_n tend vers M , extérieur à tous les C_n . Mais le centre γ de C appartient, comme les centres des C_n , à δ fermé. La demi-droite joignant M à γ ferait un angle inférieur à un droit avec MT_1 , ce qui est impossible puisque MT_1 pénétrerait alors dans C . Nous aboutissons à une contradiction; le théorème est donc démontré.

L'angle δ satisfaisant encore aux conditions du théorème précédent, désignons par Γ_ϵ l'arc circulaire ouvert de centre M et de rayon ϵ compris dans l'angle δ . En dessous d'une certaine valeur positive ϵ_1 de ϵ , l'intersection $\Gamma_\epsilon \cdot D(r)$ de Γ_ϵ et de $D(r)$ n'est pas vide; l'ensemble ouvert $\Gamma_\epsilon \cdot D(r)$ est alors une somme d'intervalles circulaires ouverts. Soit ϵ_0 le nombre positif correspondant à δ en vertu du théorème IV. Si ϵ est inférieur au plus petit, ϵ_2 , des deux nombres ϵ_0 et ϵ_1 , il résulte de ce qui précède et du

théorème IV que $\Gamma_\epsilon, D(r)$ est, soit formé d'un seul intervalle circulaire aboutissant à au moins un des côtés de δ , soit formé de deux intervalles circulaires aboutissant chacun à un côté de δ .

Donc pour ϵ positif inférieur à ϵ_2 , l'intersection $\Gamma_\epsilon \cdot [CD(r)]$ de Γ_ϵ et du complémentaire de $D(r)$ par rapport au plan tout entier est soit vide, soit réduite à un point, soit formée d'un seul arc de Γ_ϵ aboutissant au plus à un des côtés de δ . On a alors

THÉORÈME V. — Soit M un point, non isolé et à distance finie, de la frontière F d'un domaine $D(r)$. A tout angle δ de sommet M , d'ouverture non supérieure à deux droits, renfermant à son intérieur une au moins des demi-tangentes à F en M correspond un nombre positif ϵ_3 tel que, pour tout ϵ positif inférieur à ϵ_3 , l'ensemble des points non intérieurs à $D(r)$, situés dans δ sur l'arc de circonférence de centre M et de rayon ϵ , constitue, s'il n'est pas vide ou réduit à un point, un arc fermé dont seules les extrémités peuvent être des points frontières de $D(r)$.

On peut, comme pour le théorème précédent, se limiter, pour la démonstration, au cas où δ fermé ne renferme qu'une demi-tangente MT_1 à F en M et où chaque côté de δ fait un angle inférieur à un droit avec MT_1 .

Supposons qu'il en soit ainsi et soit ϵ_3 le nombre positif correspondant à δ d'après les remarques faites plus haut. Si alors la propriété indiquée n'avait pas lieu, il existerait une suite, décroissante et tendant vers zéro, de nombres $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i, \dots$, ($\eta_1 < \epsilon_3$), tels que $\Gamma_{\eta_i} \cdot [CD(r)]$ soit formé d'un arc proprement dit renfermant à son intérieur un point frontière P_i de $D(r)$. Par P_i passe une circonférence c_i limitant un cercle de rayon r intérieur à $D(r)$. Cette circonférence est nécessairement tangente en P_i à Γ_{η_i} . Le centre de c_i se trouve donc sur la droite joignant M (centre de Γ_{η_i}) à P_i et se trouve ainsi nécessairement dans δ ou dans son opposé. Un raisonnement analogue à celui fait pour le théorème IV montre que l'on arrive encore à une contradiction.

7. Les deux théorèmes précédents permettent d'établir

THÉORÈME VI. — Soit M un point, non isolé et à distance finie, de la frontière F d'un domaine $D(r)$. Si M n'est pas limite de points extérieurs à $D(r)$ ou si dans l'ensemble des cercles de rayon r intérieurs à $D(r)$ et dont la circonférence passe par M , il n'existe aucun couple de cercles de centres opposés par rapport à M , à tout angle δ de sommet M , ne renfermant dans son intérieur ou sur sa frontière qu'une seule demi-tangente en M à F , correspond un nombre ϵ_4 tel que pour tout ϵ positif inférieur

à ϵ_4 , il n'y a au plus qu'un point frontière de $D(r)$ sur l'arc de circonférence de centre M et de rayon ϵ compris dans δ .

Soit δ un angle répondant aux conditions énoncées. Il suffit de démontrer le théorème en supposant que la seule demi-tangente MT_1 que δ fermé contient soit intérieure à δ . De plus, en vertu de la remarque III du § 4, nous pouvons, pour faire la démonstration, supposer δ d'ouverture inférieure à deux droits. Supposons ces deux hypothèses réalisées et soit ϵ_3 le nombre positif correspondant à δ en vertu du théorème V.

1° Si M n'est pas limite de points extérieurs à $D(r)$, soit η_1 le rayon d'un cercle de centre M ne renfermant aucun point extérieur à $D(r)$. Si ϵ est inférieur au plus petit, ϵ_4 , des deux nombres ϵ_3 et η_1 , il résulte du théorème V et du fait que $\Gamma_\epsilon \cdot [(C D(r))]$ ne renferme plus de points extérieurs à $D(r)$, que $\Gamma_\epsilon \cdot [C D(r)]$ est ou vide ou réduit à un point qui sera nécessairement un point frontière de $D(r)$.

2° S'il n'existe dans $E(M, r)$ aucun couple de cercles de centres opposés par rapport à M , l'angle Ψ , correspondant au point M , n'est pas nul. Alors, un des côtés, MN , de δ est dans Ψ ; par conséquent, comme nous l'avons déjà vu, il existe un nombre positif η_2 tel que tous les points de MN , autres que M , distants de M de moins de η_2 , sont extérieurs à $D(r)$. Soit ϵ positif, inférieur au plus petit, ϵ_4 , des deux nombres ϵ_3 et η_2 . $\Gamma_\epsilon \cdot [C D(r)]$, qui comprend un point extérieur à $D(r)$, à savoir celui où Γ_ϵ atteint MN , se réduit à un arc en vertu du théorème V. Une extrémité est extérieure à $D(r)$; l'autre extrémité de cet arc est donc le seul point frontière de $D(r)$ situé sur Γ_ϵ . L'existence du nombre ϵ_4 est ainsi établie dans les deux cas.

REMARQUE. — Si M étant limite de points extérieurs à $D(r)$, la seconde condition de l'énoncé n'est pas vérifiée, le théorème VI peut être en défaut. Considérons par exemple un carré dont les côtés sont de longueur quatre. Soit M le point milieu du côté AB . Sur AM et BM comme diamètres, construisons, à l'extérieur du carré, deux demi-circonférences. Sur le côté opposé à AB comme diamètre, construisons à l'extérieur du carré une demi-circonférence. Le domaine compris à l'intérieur du contour F formé par les deux autres côtés et les trois demi-circonférences est un $D(1)$. Tout angle δ de sommet M et renfermant en son intérieur la tangente en M à F est tel que, quelque petit que soit ϵ , il existe dans δ sur l'arc de circonférence de centre M et de rayon ϵ deux points frontières du domaine. Mais dans tous les cas, le théorème V montre que, étant donné un point M , non isolé et à distance finie, de la frontière F d'un $D(r)$, à tout angle δ fermé de sommet M ne renfermant qu'une seule demi-tangente en M à F , correspond un nombre positif ϵ_5 tel qu'il y a au plus deux points frontières

de $D(r)$ sur tout arc de circonférence de centre M et de rayon inférieur à ϵ_5 compris dans δ ⁽¹⁾.

8. Rappelons que l'ensemble $\mathcal{E}(M, \rho)$ attaché à un point M , à distance finie, de la frontière d'un domaine est l'ensemble, pouvant être vide, des demi-droites joignant M aux centres des cercles de rayon ρ intérieurs à ce domaine et dont la circonférence passe par M . On a alors la propriété suivante, caractéristique des domaines $\Delta(r)$.

THÉORÈME VII. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine soit un domaine $\Delta(r)$ est que, en chaque point M , à distance finie, de la frontière de ce domaine, l'ensemble $\mathcal{E}(M, \rho)$ soit constant pour toute valeur de ρ , positive et non supérieure à r ⁽²⁾.

Soit un domaine D et soit M un point frontière de D , à distance finie. Comme l'ensemble $\mathcal{E}(M, \rho)$ est fonction non croissante de ρ , on voit aisément que si $\mathcal{E}(M, \rho)$ est constant pour toute valeur de ρ , positive et non supérieure à r , ou bien il n'existe aucun cercle intérieur à D dont la circonférence passe par M , ou bien tout pareil cercle de rayon inférieur à r est intérieur à un cercle de rayon r intérieur lui-même au domaine ; inversement, si une de ces deux hypothèses est réalisée en M , $\mathcal{E}(M, \rho)$ est constant pour toute valeur de ρ , positive et non supérieure à r .

Or, en tout point, à distance finie, de la frontière d'un domaine $\Delta(r)$, la seconde de ces hypothèses est réalisée ; la condition de l'énoncé est donc nécessaire. Elle est aussi suffisante pour que le domaine D soit un $\Delta(r)$. En effet, soit Γ un cercle intérieur de D , de centre P et de rayon plus petit que r . Soit δ la distance de P à la frontière de D . Si δ est non inférieur à r , Γ est certainement intérieur à un cercle de rayon r intérieur à D . Si δ est

(1) Les démonstrations des théorèmes précédents n'utilisent pas le fait que $D(r)$ est connexe ; ces théorèmes valent donc pour tout ensemble ouvert tel que chaque point de l'ensemble soit intérieur à un cercle de rayon r intérieur à l'ensemble. Par conséquent, ces théorèmes valent pour les ensembles $d(r)$ car la frontière d'un quelconque de ceux-ci peut être considérée comme étant une partie de la frontière d'un ensemble répondant à la condition précédente.

Les démonstrations valent aussi pour un ensemble ouvert tel que chaque point de l'ensemble appartienne à un cercle fermé de rayon r dont l'intérieur appartienne à l'ensemble. Pour le théorème IV, il y a une légère modification : la circonférence c_n coupe Γ_n en deux points ou est tangente en P_n à Γ_n , le reste du raisonnement demeure le même.

(2) On ne doit pas supposer, pour établir que la condition est suffisante, que $\mathcal{E}(M, \rho)$ soit non vide.

inférieur à r , considérons le cercle C de centre P et de rayon δ . C est intérieur à D et comprend Γ en son intérieur ; la circonférence de C a au moins un point commun M avec la frontière de D . Puisque $\mathcal{E}(M, \rho)$ est constant par hypothèse ($0 < \rho \leq r$), le cercle C est intérieur à un cercle de rayon r intérieur à D . Ainsi, dans tous les cas, Γ est intérieur à un cercle de rayon r intérieur à D ; D est donc un $\Delta(r)$.

Supposons en particulier que le point M , à distance finie, soit un point isolé de la frontière d'un $\Delta(r)$. Il existe un petit cercle de centre M dont tous les points sauf M appartiennent à $\Delta(r)$. Mais alors pour ρ suffisamment petit, $\mathcal{E}(M, \rho)$ comprend toutes les demi-droites issues de M ; il en est donc de même pour $\mathcal{E}(M, r)$, et par conséquent, la distance de M au restant de la frontière de $\Delta(r)$ est au moins égale à $2r$ ⁽¹⁾. Cette propriété résulte aussi comme cas particulier du théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — Si l'on peut diviser la frontière F d'un domaine $\Delta(r)$ en deux ensembles fermés et sans point commun, la distance ⁽²⁾ de ces deux ensembles n'est jamais inférieure à $2r$.

Soient E_1 et E_2 les deux ensembles fermés et sans point commun en lesquels la frontière F d'un $\Delta(r)$ est partagée. L'un d'eux est nécessairement borné ; supposons que ce soit E_1 .

Il n'y a de théorèmes à démontrer que si E_2 ne se réduit pas au point à l'infini. Dans ce cas, la distance δ de E_1 et E_2 est finie et positive. Soit A_1 un point de E_1 et A_2 un point de E_2 tels que la distance de A_1 et A_2 soit égale à δ . Nous savons ⁽³⁾ qu'il existe un polygone dont l'intérieur contient E_1 et dont l'extérieur contient E_2 . Comme $\Delta(r)$ est un ensemble connexe, le contour de ce polygone est tout entier dans $\Delta(r)$. Le segment A_1A_2 qui rencontre le contour de ce polygone en un point au moins, contient donc au moins un point intérieur à $\Delta(r)$. Alors, le cercle C , de diamètre A_1A_2 , est intérieur à $\Delta(r)$, car sinon il renfermerait un point frontière de $\Delta(r)$ dont les distances à A_1 et à A_2 seraient inférieures à δ . Mais alors, la demi-droite issue de A_1 et joignant A_1 à A_2 appartient à $\mathcal{E}(A_1, r)$. A_2 , d'après la

⁽¹⁾ Car si M , à distance finie, est point frontière d'un $\Delta(r)$, la distance de M au point, non de $\Delta(r)$ et distinct de M , le plus rapproché de M sur chacun des rayons de $\mathcal{E}(M, r)$ est au moins égale à $2r$.

⁽²⁾ Étant donnés un ensemble borné du plan complexe et un second ensemble se réduisant au point à l'infini, nous conviendrons de dire que la distance des deux ensembles est infinie (positive).

⁽³⁾ Cf. G. JULIA, Principes géométriques d'analyse, 1^{re} partie, Paris, Gauthier-Villars, 1931, p. 8.

note de la page 101, est donc distant de A_1 d'au moins $2r$; donc δ n'est pas inférieur à $2r$.

REMARQUE. — Ce théorème ne s'étend plus à un ensemble E ouvert satisfaisant à la condition énoncée pour $\Delta(r)$. Car on peut prendre pour E l'ensemble des points intérieurs à deux circonférences de rayon r complètement extérieures l'une à l'autre et à distance aussi petite que l'on veut l'une de l'autre.

Ce théorème VIII permet d'établir :

THÉORÈME IX. — Si la frontière F d'un domaine $\Delta(r)$ est finie, et donc bornée, $\Delta(r)$ est à connexion finie ⁽¹⁾.

En effet, si la frontière F de $\Delta(r)$ est un point ou un continu, le théorème est établi. Si F n'est ni un point, ni un continu, F n'est pas bien enchaîné et on peut décomposer F en deux ensembles F_1 et F_2 , nécessairement fermés et sans point commun, à distance positive l'un de l'autre. La distance de ces deux ensembles est, en vertu du théorème VIII, non inférieure à $2r$.

Supposons que F ait été décomposée en n ensembles F_1, F_2, \dots, F_n , tous à distance non inférieure à $2r$ l'un de l'autre. Alors, ou bien chaque F_i se réduit à un point ou est un continu, et le théorème est établi, ou bien la frontière F peut être décomposée en plus de n ensembles tous à distance non inférieure à $2r$ l'un de l'autre.

En effet, si F_1 , par exemple, n'est ni un point ni un continu, F_1 n'est pas bien enchaîné et peut donc se décomposer en deux ensembles F'_1 et F''_1 à distance positive l'un de l'autre. F'_1 et F''_1 sont évidemment chacun à distance non inférieure à $2r$ de chacun des F_i ($i = 2, 3, \dots, n$) restants. De plus, la distance des ensembles F'_1 et $(F''_1 + F_2 + \dots + F_n)$, qui sont à distance positive l'un de l'autre, n'est pas inférieure à $2r$; donc la distance de F'_1 et F''_1 n'est pas inférieure à $2r$; notre affirmation est établie.

Maintenant, si $\Delta(r)$ n'est pas à connexion finie, ce processus de décomposition de F se poursuivrait indéfiniment.

Cela est impossible car F est borné et le nombre de points de tout système S de points de F à distance non inférieure à $2r$ l'un de l'autre est, par conséquent, borné supérieurement.

En effet, imaginons autour de chaque point d'un système S comme centre, un cercle de rayon r . Pour un même système S , deux quelconques de ces cercles ne peuvent empiéter l'un sur l'autre ; le nombre des cercles

(1) Ce théorème vaut aussi pour un $\Delta(r)$ pour lequel le point à l'infini est un point frontière isolé. Des exemples montrent qu'il n'est pas vrai pour un $D(r)$ quelconque.

de tout pareil système de cercles est borné supérieurement. En effet, si R' est le rayon d'un cercle de centre origine contenant F , le nombre des cercles d'un même système S est inférieur au rapport N de l'aire d'un cercle de rayon $(R' + r)$ à l'aire d'un cercle de rayon r . Donc le nombre de points de tout système S est inférieur à N . $\Delta(r)$ est à connexion finie car s'il ne l'était pas, on pourrait, par le processus ci-dessus, décomposer F en plus de N ensembles tous à distance non inférieure à $2r$ l'un de l'autre, et on pourrait donc trouver un système S renfermant plus de N points.

Si la frontière n'est pas bornée la propriété précédente n'a pas lieu nécessairement. Considérons en effet le domaine obtenu en supprimant du plan complexe le point à l'infini et les segments de droite de longueur un, perpendiculaires à l'axe réel, symétriques par rapport à celui-ci et le rencontrant aux points d'abscisse $2, 4, 6 \dots, 2n, \dots$. Ce domaine est un $\Delta(1)$ et il n'est pas à connexion finie.

Deuxième Section

Physique et Chimie

M. R. Breckpot fait une communication orale: a) sur la relation entre l'intensité spectrale et la concentration, b) sur la correction pour fond continu en analyse spectrale.

M. Van Dingenen fait une communication orale sur une vérification expérimentale de la théorie de Polanyi de l'adsorption.

Théorie de l'élasticité du second ordre avec application à la théorie du flambage

PAR

M. BIOT

INTRODUCTION

La théorie de l'Élasticité part de l'hypothèse que les déformations, les rotations et les tensions sont des quantités petites du premier ordre, et les équations classiques négligent les termes du second ordre. Nous avons établi une théorie qui permet d'introduire aisément tous les termes du second ordre sans devoir formuler d'une manière explicite les propriétés élastiques du matériau.

La méthode variationnelle est adoptée dans ce qui suit, bien qu'elle ne soit pas essentielle. Le succès de la méthode, et la possibilité de déduire le même résultat à partir du point de vue très différent de la condition d'équilibre d'un élément infinitésimal sont dus à l'introduction d'une expression nouvelle du tenseur déformation.

L'énergie potentielle élastique correspondant à des équations de l'Élasticité du second ordre doit contenir tous les termes du troisième ordre. Ayant obtenu cette expression, nous remarquons qu'elle peut s'appliquer soit à une théorie du second ordre avec un état initial de tensions nulles, soit à une théorie du premier ordre à partir d'un état

initial de tension. Ceci tient au fait que notre expression de l'énergie potentielle contient tous les termes du premier ordre et du second ordre par rapport aux déformations indépendamment de la grandeur des tensions. On peut donc supposer les tensions initiales arbitraires et établir une théorie linéaire de l'Elasticité pour de petites déformations à partir de cet état et un petit accroissement correspondant des tensions. Ce sont ces équations que nous avons déduites ici. Elles permettent d'établir une théorie rigoureuse de phénomènes tels que la propagation des ondes dans un milieu soumis à un état initial de tension ou du phénomène d'instabilité de l'équilibre élastique généralement désigné sous le nom de flambage.

Nous avons mis en évidence la différence fondamentale que l'on doit introduire lorsqu'on considère la tension $s^{\mu\nu}$ par unité de surface après déformation ou la tension $t^{\mu\nu}$ par unité de surface avant déformation et nous avons aussi établi quelle relation doit exister entre ces deux représentations de la tension.

La loi d'Hooke est aussi différente lorsqu'on utilise l'un ou l'autre système de tension. Les modules d'élasticité constituent une matrice symétrique lorsqu'on considère les tensions $t^{\mu\nu}$ tandis qu'ils satisfont des relations différentes lorsqu'on considère les relations $s^{\mu\nu}$.

Les équations d'équilibre interne déduites de l'expression de l'énergie potentielle par la méthode variationnelle peuvent s'exprimer soit à l'aide des tensions $t^{\mu\nu}$ soit à l'aide des tensions $s^{\mu\nu}$. Celles qui utilisent les tensions $t^{\mu\nu}$ sont équivalentes à celles obtenues d'une manière toute différente par C. Biezeno et H. Hencky (¹).

La déduction des équations non linéaires de la théorie du second ordre lorsque les tensions initiales sont nulles n'a pas été faite ici, mais il est facile de voir qu'on est conduit à des équations dont la forme est identique à celle des équations obtenues.

Considérons d'abord une déformation pure homogène, définie par la transformation linéaire à coefficients symétriques

$$(1) \quad z^i = \sum_j (\delta_j^i + \epsilon_j^i) x^j$$

où

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\epsilon_j^i = \epsilon_i^j$$

(¹) C. B. BIEZENO et H. HENCKY, On the General theory of elastic stability. *Kon. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam Proceedings*. Vol. XXXI, n° 6.

Supposons un état de tension homogène σ_j^i associé à la déformation pure et proposons-nous de calculer la variation d'énergie potentielle de déformation lorsqu'on donne une variation $\delta \epsilon_j^i$ au tenseur déformation ϵ_j^i .

Désignons par F_i les forces par unité de surface agissant à la surface S d'un volume V . La variation δW_v d'énergie potentielle de ce volume est

$$(2) \quad \delta W_v = \iint_S \sum_i F_i \delta \xi^i dS$$

ou

$$(3) \quad \delta \xi^i = \sum_j \delta \epsilon_j^i x^j$$

et

$$(4) \quad F_i = \sum_j \sigma_j^i \alpha_j$$

où α_j désignent les cosinus directeurs de la normale extérieure à S .

Dès lors

$$(5) \quad \delta W_v = \iint_S \sum_{ij} \sigma_j^i \delta \xi^i \alpha_j dS.$$

Par la formule de Green ceci s'exprime sous forme d'une intégrale de volume

$$(6) \quad \delta W_v = \iiint_V \sum_{ij} \sigma_j^i \frac{\partial}{\partial \xi^j} \delta \xi^i dV.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial \xi^j} \delta \xi^i$ s'obtiennent facilement en résolvant le système (1) par rapport à x^j et substituant dans les équations (3). On trouve

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial \xi^j} \delta \xi^i = \frac{1}{D} (1 + \epsilon) \delta \epsilon_j^i - \frac{1}{D} \sum_k \epsilon_j^k \delta \epsilon_k^i.$$

Comme nous avons en vue une théorie du second ordre, nous n'avons gardé dans cette expression que les termes du premier et du second ordre en ϵ_j^i .

Nous désignons par $D = |\delta_j^i + \epsilon_j^i|$ le déterminant ou Jacobien de la transformation (1) et $\epsilon = \sum_i \epsilon_i^i$. Nous substituons les valeurs (7) dans l'intégrale (6). En tenant compte que

$$\frac{dV}{D} = dV',$$

où V' désigne le volume initial occupé par V avant déformation on trouve

$$(8) \quad \delta W_v = \iiint_{V'} \sum_{ij} \left[(1 + \epsilon) \sigma_j^i - \sum_k \epsilon_k^j \right] \delta \epsilon_j^i dV'$$

l'intégrale étant étendue maintenant au volume initial avant déformation.

L'expression

$$(9) \quad \delta W = \sum^{ij} \left[(1 + \epsilon) \sigma_i^j - \sum^k \epsilon_k^j \sigma_i^k \right] \delta \epsilon_i^j$$

est la variation d'énergie potentielle par unité de volume initial. En vertu de la symétrie on peut écrire

$$(10) \quad \delta W = \sum^{ij} \tau_i^j \delta \epsilon_j^i$$

avec

$$(11) \quad \tau_i^j = (1 + \epsilon) \sigma_i^j - \frac{1}{2} \sum^k (\epsilon_k^j \sigma_i^k + \epsilon_k^i \sigma_j^k).$$

Le tenseur τ_i^j constitue un autre mode de représentation de la tension. C'est la partie symétrique des neuf composantes des forces agissant après déformation sur les faces d'un cube unitaire initial. Le tenseur σ_i^j représente les tensions réelles tandis que τ_i^j représente les forces rapportées aux surfaces avant déformation.

Il nous reste maintenant à établir une expression pour le tenseur déformation ϵ_j^i correcte jusqu'au second ordre, lorsque la déformation n'est pas homogène.

Dans ce cas, les coordonnées initiales x^i d'un point P du matériau deviennent $\xi^i = x^i + u^i$ après déformation. Les u^i sont supposés fonctions continues des coordonnées initiales x^i .

La région infinitésimale qui entoure le point P subit la transformation homogène

$$(12) \quad d\xi^i = \sum^j \left(\delta_j^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) dx^j.$$

Posant

$$(13) \quad \begin{aligned} e_j^i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \\ w_j^i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \end{aligned}$$

il vient

$$(14) \quad d\xi^i = \sum^j (\delta_j^i + e_j^i + w_j^i) dx^j.$$

L'élément de longueur s'écrit

$$(15) \quad ds^2 = \sum^i (d\xi^i)^2 = \sum^{\mu\nu} [\delta_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu$$

avec

$$\delta_{\mu\nu} = \delta_\mu^i \delta_\nu^i = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$(16) \quad g_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum^i e_{\mu}^i e_{\nu}^i + \frac{1}{2} \sum^i (w_{\mu}^i e_{\nu}^i + w_{\nu}^i e_{\mu}^i) + \frac{1}{2} \sum^i w_{\mu}^i w_{\nu}^i$$

Nous avons écrit $e_{\mu\nu}$ au lieu de e_{ν}^{μ} .

La transformation (12) n'est pas à coefficients symétriques. Toutefois nous pouvons lui associer la transformation à coefficients symétriques

$$(17) \quad (d\xi^i)^2 = \sum^j (\delta_j^i + \epsilon_j^i) dx^j$$

ou

$$\epsilon_j^i = \epsilon_i^j$$

L'élément de longueur de cette transformation est

$$(18) \quad d\sigma^2 = \sum^{\mu\nu} [\delta_{\mu\nu} + 2\gamma_{\mu\nu}] dx^{\mu} dx^{\nu}$$

avec

$$(19) \quad \gamma_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum^i \epsilon_{\mu}^i \epsilon_{\nu}^i$$

Nous avons écrit $\epsilon_{\mu\nu}$ au lieu de ϵ_{ν}^{μ} . On peut faire en sorte que les transformations (17) et (18) représentent le même état de déformation en posant l'identité

$$ds^2 = d\sigma^2$$

équivalente aux six équations

$$(20) \quad g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$$

On en conclut que $\epsilon_{\mu\nu}$ et $e_{\mu\nu}$ diffèrent par une quantité du second ordre et, par conséquent, on peut écrire avec une erreur du troisième ordre les identités

$$(21) \quad \sum^i e_{\mu}^i e_{\nu}^i = \sum^i \epsilon_{\mu}^i \epsilon_{\nu}^i$$

Introduisant cette identité dans les équations (20), on trouve

$$(22) \quad \epsilon_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum^i (w_{\mu}^i e_{\nu}^i + w_{\nu}^i e_{\mu}^i) + \frac{1}{2} \sum^i w_{\mu}^i w_{\nu}^i$$

Ceci donne les composantes du tenseur déformation correctes jusqu'au second ordre.

Introduisant ces composantes dans l'expression (10) pour δW , on peut

établir une théorie de l'Élasticité contenant tous les termes du premier et du second ordre en σ_i^j , ϵ_i^j et w_i^j .

Nous pouvons aussi traiter le cas d'un milieu soumis à un état initial de tension S_i^j et subissant une petite déformation à partir de cet état. Nous nous posons alors le problème d'établir une théorie de l'Élasticité pour un tel milieu avec tous les termes linéaires.

Ces deux théories et les équations qui en résultent étant fort semblables, nous traiterons ici uniquement le second cas. Nous utiliserons indifféremment la notation $A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}$ pour le tenseur A_μ^ν selon l'avantage de la notation. Les formules ne sont par conséquent valables que pour des tenseurs cartésiens.

Les tensions initiales sont désignées par $S^{\mu\nu}$. Elles sont en équilibre et satisfont par conséquent à l'équation

$$(23) \quad \sum \frac{\partial S^{vi}}{\partial x^v} + \rho X^i = 0$$

où ρX^i représente la force de volume. On suppose que le matériau subit alors une transformation

$$\xi^i = x^i + u^i$$

telle que les grandeurs u^i , e_j^i et w_j^i soient petites du premier ordre. Les tensions deviennent $S^{\mu\nu} + s^{\mu\nu}$; nous supposons les accroissements de tensions petits du premier ordre.

Afin d'établir une théorie linéaire par rapport à u^i , e_j^i et w_j^i , nous devons partir d'une expression de l'énergie potentielle contenant tous les termes linéaires et quadratiques par rapport à ces grandeurs.

En introduisant $\sigma^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + s^{\mu\nu}$ dans l'expression (10), et négligeant les termes d'ordre supérieur au second, on a

$$(24) \quad \delta W = \sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu} \delta \epsilon_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu} \delta \epsilon_{\mu\nu}$$

avec

$$(25) \quad t^{\mu\nu} = s^{\mu\nu} + \epsilon S^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum^k (\epsilon_k^\mu S^{\nu k} + \epsilon_k^\nu S^{\mu k}).$$

Le tenseur $t^{\mu\nu}$ est différent du tenseur $s^{\mu\nu}$. Ce dernier représente les accroissements des tensions réelles, tandis que $t^{\mu\nu}$ représente les accroissements des forces rapportées aux surfaces initiales.

La loi d'Hooke généralisée s'exprime par

$$(26) \quad t^{\mu\nu} = \sum_{rk} B_{rk}^{\mu\nu} \epsilon^{rk}$$

où la somme est étendue à toutes les *combinaisons* de r et k . La condition que δW soit différentielle exacte s'exprime par les quinze relations

$$(27) \quad B_{rk}^{\mu\nu} = B_{\mu\nu}^{rk}.$$

L'énergie potentielle est une forme linéaire et quadratique

$$(28) \quad W = \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}.$$

Si nous introduisons les tensions réelles $s^{\mu\nu}$, la loi d'Hooke s'écrit

$$(29) \quad s^{\mu\nu} = \sum^{rk} C_{rk}^{\mu\nu} \epsilon^{rk}$$

avec la condition

$$(30) \quad \begin{aligned} C_{rk}^{\mu\nu} + S^{rk} \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\mu\nu}} \sum^{\alpha} (S^{\alpha k} \epsilon_{\alpha}^r + S^{\alpha r} \epsilon_{\alpha}^k) = \\ C_{\mu\nu}^{rk} + S^{\mu\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_{rk}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon_{rk}} \sum^{\alpha} (S^{\alpha \mu} \epsilon_{\alpha}^{\nu} + S^{\alpha \nu} \epsilon_{\alpha}^{\mu}). \end{aligned}$$

On voit que les coefficients C n'obéissent pas à la relation de symétrie satisfaite par les coefficients B .

L'expression de l'énergie potentielle en fonction des tensions réelles est

$$(31) \quad W = \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} s^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} \left[S^{\mu\nu} \epsilon - \frac{1}{2} \sum^k (\epsilon_k^{\mu} S^{\nu k} + \epsilon_k^{\nu} S^{\mu k}) \right] + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}$$

Les expressions (28) et (31) de l'énergie potentielle renferment tous les termes linéaires et quadratiques. On peut évidemment substituer $e_{\mu\nu}$ au lieu de $\epsilon_{\mu\nu}$ dans les lois d'Hooke (26) et (29) et dans les relations (25). De même, on peut effectuer cette même substitution dans certains termes de l'énergie potentielle sans affecter les termes du premier et du second ordre. On trouve

$$(32) \quad W = \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}$$

$$(33) \quad W = \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} s^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} e_{\mu\nu} \left[S^{\mu\nu} e - \frac{1}{2} \sum^k (e_k^{\mu} S^{\nu k} + e_k^{\nu} S^{\mu k}) \right] + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}$$

Le calcul des variations et le principe des travaux virtuels permettent à partir de ces valeurs W d'établir les équations d'équilibre du milieu. Admettons que la déformation est due à un accroissement ΔF^i des forces de surfaces et $\rho \Delta X^i$ des forces de volume. Annulons le travail virtuel total

$$(34) \quad \iint_s \sum^i (F^i + \Delta F^i) \delta u^i dS + \iiint_v \sum^i \rho (X^i + \Delta X^i) \delta u^i dV - \iint_v \delta W dV = 0$$

avec l'expression (32) pour W .

Rappelons que W est l'énergie potentielle par unité de volume initial ; par conséquent, V est le volume initial et les variables d'intégration sont les coordonnées initiales.

Appliquons la méthode classique du calcul des variations. En tenant compte des conditions initiales d'équilibre (23) et des conditions initiales aux limites, on trouve

$$(35) \quad \sum^v \frac{\partial t^{vi}}{\partial x^v} + \sum^{\mu v} \frac{\partial}{\partial x^v} \left(S^{\mu v} \omega_{\mu}^i + \frac{1}{2} S^{\mu v} e_{\mu}^i - \frac{1}{2} S^{\mu i} e_{\mu}^v \right) + \rho \Delta X^i = 0$$

avec la condition aux limites

$$(36) \quad \Delta F^i = \sum^v t^{vi} \alpha_v + \sum^{\mu v} \left[S^{\mu v} \omega_{\mu}^i + \frac{1}{2} S^{\mu v} e_{\mu}^i - \frac{1}{2} S^{\mu i} e_{\mu}^v \right] \alpha_v.$$

Les équations (35) sont les *équations d'équilibre d'un milieu soumis à tensions initiales avec tous les termes du premier ordre*.

Ces mêmes équations exprimées à l'aide des tensions réelles s'obtiennent en substituant les valeurs (25). On trouve

$$(37) \quad \sum^v \frac{\partial s^{vi}}{\partial x^v} + \sum^v \frac{\partial (e S^{vi})}{\partial x^v} + \sum^{\mu v} \frac{\partial}{\partial x^v} \left(S^{\mu v} \omega_{\mu}^i - S^{\mu i} e_{\mu}^v \right) + \rho \Delta X^i = 0$$

et les conditions aux limites

$$(38) \quad \Delta F^i = \sum^i s^{vi} \alpha_v + e \sum^v S^{vi} \alpha_v + \sum^{\mu v} \left(S^{\mu v} \omega_{\mu}^i - S^{\mu i} e_{\mu}^v \right) \alpha_v.$$

Les équations (38) prennent une forme remarquable si on les transforme à l'aide des relations (23) et des identités

$$(39) \quad \sum^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(e_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu} \right) = \sum^{\mu} \frac{\partial e_{\mu}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial e}{\partial x^{\nu}}.$$

Les équations (37) deviennent

$$(40) \quad \sum^v \frac{\partial s^{vi}}{\partial x^v} + \rho \Delta X^i - \rho \sum^{\mu} \omega_{\mu}^i X^{\mu} + \sum^{\mu v} \left(S^{vi} \frac{\partial \omega_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + S^{\mu v} \frac{\partial \omega_{\mu}^i}{\partial x^v} \right) - e \rho X^i - \sum^{\mu v} e_{\mu}^v \frac{\partial S^{\mu i}}{\partial x^v} = 0.$$

Les termes additionnels de la seconde ligne sont dus à la *courbure* et à la *torsion* d'un élément. Nous les dénommerons *termes de courbure*. Ceux de la troisième ligne sont des *termes de sustentation* dus à la déformation d'un élément dans le champ des tensions initiales. Ces derniers disparaissent si le champ initial est homogène. On peut vérifier que les *termes de courbure ne dépendent que du cisaillement*, car ils disparaissent

si la tension initiale est hydrostatique. Ce sont évidemment les termes de courbure qui jouent le rôle prépondérant dans le cas bien connu du *flambage* ou d'instabilité de l'équilibre élastique. Ce phénomène dépend donc de l'existence d'un état de *tension de cisaillement initial*.

Pour fixer les idées, considérons le cas d'une déformation plane. Posons

$$\begin{aligned} x' &= x & u' &= u & X' &= X \\ x'' &= y & u'' &= v & X'' &= Y \end{aligned}$$

$$e_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{pmatrix} \quad w_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{xx} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad w = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Les équations (40) deviennent

$$\begin{aligned} (41) \quad & \frac{\partial s^{11}}{\partial x} + \frac{\partial s^{12}}{\partial y} + \rho \Delta X + \rho w Y \\ & + (S^{11} - S^{22}) \frac{\partial w}{\partial y} - 2 S^{12} \frac{\partial w}{\partial x} \\ & - e \rho X - e_{xx} \frac{\partial S^{11}}{\partial x} - e_{yy} \frac{\partial S^{12}}{\partial y} - e_{xy} \left(\frac{\partial S^{12}}{\partial x} + \frac{\partial S^{11}}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

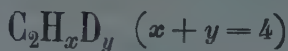
et une autre équation similaire pour la direction y .

Si les termes de cisaillement sont nuls ou négligeables, et s'il n'y a pas de force de volume, les équations (41) prennent la forme

$$\begin{aligned} (42) \quad & \frac{\partial s^{11}}{\partial x} + \frac{\partial s^{12}}{\partial y} + (S^{11} - S^{22}) \frac{\partial w}{\partial y} - 2 S^{12} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial s^{12}}{\partial x} + \frac{\partial s^{22}}{\partial y} + (S^{11} - S^{22}) \frac{\partial w}{\partial x} + 2 S^{12} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Ce sont les équations typiques du phénomène de *flambage*. Les termes caractéristiques ne dépendent que des composantes $(S^{11} - S^{22})$ et S^{12} du cisaillement initial.

Calcul des fréquences et modes fondamentaux gauches de vibration des molécules de deutéroéthylène



PAR

E. BERNARD ET C. MANNEBACK

1. INTRODUCTION.

Le présent travail se rattache à d'autres relatifs aux molécules de deutéroéthylène, en particulier à celui de Y. L. TCHANG consacré au calcul de la fonction potentielle complète des mouvements *plans*, commune à toutes les molécules de deutéroéthylène. Dans tous ces travaux, les mouvements fondamentaux gauches, (perpendiculaires au plan de repos de la molécule) avaient été négligés, faute de données expérimentales suffisantes. Or il se fait que l'identification de deux des modes plans est loin d'être absolument établie. Ceci nous avait engagés à examiner les conséquences d'une autre identification possible pour ces deux modes douteux : les considérer comme des modes gauches. Entretemps, un travail tout récent de Sutherland ⁽¹⁾ est venu éclaircir la question.

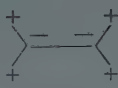
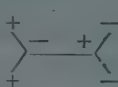
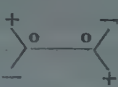
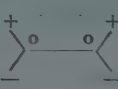
2. Modes gauches de C_2H_4 et C_2D_4 .

Toute molécule, plane au repos, du type $\text{C}_2\text{H}_x\text{D}_y$ ($x + y = 4$) possède 6 modes gauches, dont 3 sont impropres (fréquence nulle), une translation et deux rotations. Nous admettons pour les molécules C_2H_4 et C_2D_4 les symétries suivantes : plan de la molécule, plan xz (π_x, σ_x) et plan yz (π_y, σ_y). Le centre O de la molécule est centre de symétrie. (Axe z , perpendiculaire au plan de la molécule ; axe x , coïncidant avec la direction CC ; axe y , perpendiculaire aux précédents). Les lettres π et σ désigneront dans la suite la symétrie ou l'antisymétrie du mouvement par rapport à l'élément indiqué ; S et A seront employés de même par rapport au centre de symétrie.

(1) Nous remercions le prof. Sutherland d'avoir bien voulu nous communiquer son manuscrit avant la publication.

Nous adopterons les dimensions de la molécule qui ont servi dans les calculs précédents : $\overline{CC} = 1,37$ et $\overline{CH} = 1,04 \times 10^{-8}$ cm, angle $HCH = 126^\circ$. Des valeurs peut-être plus exactes ont été données depuis par PENNEY (1,33 ; 1,08 et 118°). Les résultats qui suivent seraient à peine influencés par ce changement. Dans la suite, tous les mouvements considérés auront la même symétrie σ_z par rapport au plan de la molécule ; nous omettrons, en général, de la mentionner.

TABLEAU I

Désignation	Symétries	Sélection	Mouvements gauches	Coordonnées symétriques
A	$A(\pi_x \pi_y \sigma_z)$	I. R.	 <i>Antitranlation</i>	$4\lambda_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ $2\mu_1 = Z_{12} + Z_{34}$
B	$S(\pi_x \sigma_y \sigma_z)$	Ra	 <i>Antirotation</i>	$4\lambda_2 = z_1 + z_2 - z_3 - z_4$ $2\mu_2 = Z_{12} - Z_{34}$
C	$A(\sigma_x \sigma_y \sigma_z)$	Total. Inact.	 <i>Torsion</i>	$4\lambda_3 = z_1 - z_2 + z_3 - z_4$
D	$S(\sigma_x \pi_y \sigma_z)$		 <i>Rotation x</i>	$4\lambda_4 = z_1 - z_2 - z_3 + z_4$

Les coordonnées sont définies pour la molécule $\begin{matrix} H_1 & & H_1 \\ & C_{12}C_{34} & \\ H_2 & & H_3 \end{matrix}$; les lettres z et Z désignent des elongations perpendiculaires au plan de la molécule. Le tableau I résume les propriétés qui découlent des symétries existantes ; IR et Ra désignent respectivement des modes actifs en absorption infra-rouge seulement ou en diffusion Raman seulement.

L'emploi des coordonnées symétriques permet la « séparation » de l'énergie potentielle (limitée à ses termes du second degré) en une somme de trois termes ne contenant chacun que les coordonnées symétriques

d'une seule famille de symétrie. Le terme correspondant à la famille D est évidemment nul.

$$2U = 2U_A(\lambda_1\mu_1) + 2U_B(\lambda_2\mu_2) + 2U_C(\lambda_3)$$

De même, l'énergie cinétique s'écrit

$$2T = 2T_A + 2T_B + 2T_C + 2T_D = 2M(\dot{\mu}_1^2 + \dot{\mu}_2^2) + 4m(\dot{\lambda}_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 + \dot{\lambda}_3^2 + \dot{\lambda}_4^2)$$

où m désignera la masse m_H des atomes d'hydrogène ou m_D des atomes de deutérium, selon le cas et M celle des atomes de carbone.

Remarquant que U doit s'annuler pour la translation A et la rotation B, on obtient immédiatement

$$2U_A = 4a(\mu_1 - \lambda_1)^2$$

$$2U_B = 4b(x\mu_2 - \lambda_2)^2$$

$$2U_C = 4c\lambda_3^2$$

où a , b , c sont trois paramètres caractérisant les déformations gauches correspondantes de la molécule et

$$x = 1 + \frac{2l \cos \alpha/2}{L} \quad \begin{array}{l} L = \overline{CC} \quad l = \overline{CH} \\ \alpha = \text{angle HCH} \end{array}$$

$4a$ représente l'énergie potentielle d'une « antittranslation » dans laquelle l'axe \overline{CC} est écarté d'une distance unité par rapport au plan commun des quatre atomes d'hydrogène ; $4b$ représente l'énergie potentielle d'une « antirotation » dans laquelle la distance entre les deux plans en antirotation (celui passant par l'axe \overline{CC} et celui commun aux atomes d'hydrogène) mesurée au niveau des elongations des atomes d'hydrogène est l'unité.

On obtient immédiatement les expressions des fréquences figurant au tableau III pour C_2H_4 et C_2D_4 .

3. Modes gauches de C_2H_3D et C_2HD_3 .

Ici, toute symétrie pour la distribution des masses dans la molécule a disparu. Il s'ensuit que la fonction cinétique n'est plus « séparable », mais contient des termes mixtes qui provoqueront un « couplage » des divers modes A, B, C, D entre eux, pour donner un mode résultant n'ayant plus aucune symétrie. Désignant par m_1 , m_2 , etc., les masses des atomes d'hydrogène ou de deutérium, on a, en général,

$$\begin{aligned} 2T = 2M(\dot{\mu}_1^2 + \dot{\mu}_2^2) &+ (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)(\dot{\lambda}_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 + \dot{\lambda}_3^2 + \dot{\lambda}_4^2) \\ &+ 2(m_1 + m_2 - m_3 - m_4)(\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_3\dot{\lambda}_4) \\ &+ 2(m_1 - m_2 + m_3 - m_4)(\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_3 + \dot{\lambda}_2\dot{\lambda}_4) \\ &+ 2(m_1 - m_2 - m_3 + m_4)(\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_4 + \dot{\lambda}_2\dot{\lambda}_3) \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange donnent directement une équation déterminante du sixième degré pour le carré de la pulsation ($2\pi \times$ fréquence) des vibrations fondamentales. Trois racines nulles peuvent être mises en facteur et l'équation cubique qui subsiste donne pour les fonctions symétriques des racines, dans le cas de C_2H_3D

$$\begin{aligned}\Sigma \Omega^2 &= \frac{2}{M} (a + x^2b) + \frac{1}{\mathfrak{M}_1} (a + b + c) \\ \Sigma \Omega^4 \Omega^2 &= \frac{4x^2ab}{M^2} + \frac{2}{M} \frac{1}{\mathfrak{M}_1} [a(b+c) + x^2b(a+c)] + \frac{1}{m_H} \frac{1}{\mathfrak{M}_2} [ab + bc + ca] \\ \Omega_1^2 \Omega_2^2 \Omega_3^2 &= abc \left[\frac{4x^2}{M^2 \mathfrak{M}_1} + \frac{2}{m_H} \left(\frac{1+x^2}{M \mathfrak{M}_2} + \frac{1}{2m_H \mathfrak{M}_3} \right) \right]\end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{\mathfrak{M}_1} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{m_H} + \frac{1}{m_D} \right) \quad \frac{1}{\mathfrak{M}_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_D} \right) \quad \frac{1}{\mathfrak{M}_3} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m_H} + \frac{3}{m_D} \right)$$

Pour la molécule C_2HD_3 , il suffit de remplacer dans les formules \mathfrak{M}_1 par \mathfrak{M}_3 et réciproquement. On vérifie que pour $m_H = m_D$, on retrouve bien les formules connues.

4. Modes gauches de $C_2H_2D_2$ trans, cis et asym.

Il y a trois isomères $C_2H_2D_2$: chez *trans*, il y a symétrie des masses par rapport au centre de la molécule ; chez *cis*, par rapport au plan yz ; chez *asym*, par rapport au plan xz . Il s'ensuit, pour chacun de ces trois isomères, une séparation des mouvements des modes en deux classes de symétrie, différentes pour chaque molécule, comme l'indique le tableau suivant.

TABLEAU II

Symétrie des masses	Symétrie du mouvement	Transl. Rotat	Sélection	Coordonnées symétriques
<i>trans</i>	$2A(A + C)$	1T	1R	$\lambda_1 \mu_1 \lambda_3$
	$1S(B + D)$	2R	Ra	$\lambda_2 \mu_2 \lambda_4$
<i>cis</i>	$1\pi_y(A + D)$	1T + 1R	1R + Ra	$\lambda_1 \mu_1 \lambda_4$
	$2\sigma_y(B + C)$	1R	Ra	$\lambda_2 \mu_2 \lambda_3$
<i>asym</i>	$2\pi_x(A + B)$	1T + 1R	1R + Ra	$\lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2$
	$1\sigma_x(C + D)$	1R	Ra	$\lambda_3 \lambda_4$

La notation 2A (A + C) signifie qu'il y a deux modes fondamentaux antisymétriques par rapport au centre de la molécule, résultant du « couplage » ou de la « fusion » des modes de famille A et C précédemment définis. Le couplage est causé par la diminution de symétrie des masses. La notation suivante 1T signifie que la translation perpendiculaire au plan de la molécule possède la symétrie qui vient d'être mentionnée.

Les règles de sélection résultent de principes bien connus, établis par PLACZEK et CABANNES. La fonction cinétique se sépare chaque fois en deux parties, contenant les coordonnées symétriques indiquées dans la dernière colonne.

On obtient, par le procédé connu, les résultats du tableau suivant

TABLEAU III

Molécules C_2H_4 ($m = m_H$) et C_2D_4 ($m = m_D$)

A	$\Omega^2 = \frac{a}{\mu}$	$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{2}{M}$
B	$\Omega^2 = \frac{b}{\mu_1}$	$\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{m} + \frac{2x^2}{M}$
C	$\Omega^2 = \frac{c}{m}$	$x = 1 + \frac{2l}{L}q \quad q = \cos \alpha/2$

Molécules $C_2H_2D_2$

$$m = \frac{1}{2}(m_H + m_D)$$

<i>trans</i> A	$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \frac{a}{\mu} + \frac{c}{m}$	$\frac{1}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_D}\right)$
----------------	---	---

	$\Omega_1^2 \cdot \Omega_2^2 = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{c}{m}$	$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{2}{M}$
--	---	---

S	$\Omega^2 = \frac{b}{\mu_1}$	$\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{m} + \frac{2x^2}{M}$
---	------------------------------	--

<i>cis</i> π_y	$\Omega^2 = \frac{a}{\mu}$
--------------------	----------------------------

σ_y	$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \frac{b}{\mu_1} + \frac{c}{m}$
------------	---

	$\Omega_1^2 \cdot \Omega_2^2 = \frac{b}{\mu_1} \cdot \frac{c}{m}$
--	---

$$\begin{aligned}
 \text{asym } \pi_x \quad \Omega_1^2 + \Omega_2^2 &= \frac{a}{\mu} + \frac{b}{\mu_1} \\
 \Omega_1^2 \cdot \Omega_2^2 &= ab \left[\frac{2}{M} \cdot \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{m\mu_1} \right] \\
 \sigma_x \quad \Omega^2 &= \frac{c}{m}
 \end{aligned}$$

On remarque que l'on passe des μ aux $\bar{\mu}$ en remplaçant m par \bar{m} . On vérifie aussi que pour $m_H = m_D$ les formules des molécules bisubstituées se transforment bien en celles de C_2H_4 .

5. Résultats numériques.

Nous avons pris comme point de départ les données expérimentales suivantes (en cm^{-1}) :

TABLEAU IV

C_2H_4	950	950	800
C_2D_4	724	780	—
	(IR)A	(R α)B	(Inact)C
R_{th}	1.322	1.230	1.413
R_{exp}	1.312	1.218	—
R_{spec}	1.306	1.214	1.398

Entre les fréquences correspondantes des deux molécules, il existe les « relations isotopiques »

$$(A) \quad \frac{\Omega_H}{\Omega_D} = \sqrt{\frac{\mu_D}{\mu_H}} = R_{th} \quad (B) \quad \frac{\Omega_H}{\Omega_D} = \sqrt{\frac{\mu_{1D}}{\mu_{1H}}} = R'_{th} \quad (C) \quad \frac{\Omega_H}{\Omega_D} = \sqrt{\frac{m_D}{m_H}}$$

Le petit écart entre les rapports théoriques R_{th} et les rapports expérimentaux R_{exp} , ceux-ci étant inférieurs aux précédents, révèle la présence d'une légère anharmonicité des vibrations.

TCHANG a montré comment la substitution des masses appelées « spectroscopiques », de valeurs en unités atomiques

$$m'_H = 1,088 \quad m'_D = 2,126,$$

au lieu des valeurs habituelles

$$m_H = 1,008 \quad m_D = 2,014,$$

permet d'interpréter de façon très satisfaisante l'ensemble des résultats expérimentaux dans le cas des vibrations planes des deutéroéthylènes. Nous adopterons donc les mêmes masses spectroscopiques partout dans la suite, bien qu'ici la petite valeur des écarts n'exige pas absolument leur introduction. Pour plus de détails au sujet de la signification physique à attribuer à l'emploi des masses spectroscopiques, on pourra se référer à un exposé récent de l'un de nous.

On obtient ainsi le paramètre a de la fonction potentielle

$$a_H = k \cdot \mu_H \cdot \nu_H^2 = 0,4874 \times 10^5 \text{ dynes} \times \text{cm.}$$

$$a_D = k \cdot \mu_D \cdot \nu_D^2 = 0,4824 \times 10^5 \quad \gg$$

où ν est exprimé en cm^{-1} et k est le facteur de réduction des unités connu $5,863 \times 10^{-2}$. Les deux valeurs de a devraient être identiques; nous choisirons

$$a = 0,4849 \times 10^5.$$

De même, nous choisirons la moyenne de $b_H = 0,3794$ et $b_D = 0,3771$, soit

$$b = 0,3782 \times 10^5,$$

et enfin

$$c = 0,4081 \times 10^5.$$

Recalculant les fréquences de départ, on obtient (cm^{-1})

(A) $\nu_H = 947.5$	(B) $\nu_H = 948.5$
$\nu_D = 725.8$	$\nu_D = 781.$

Utilisant les valeurs ci-dessus pour a , b , c , nous avons calculé les fréquences suivantes, au moyen des formules données plus haut ($k^2 = 2,854$)

TABLEAU V

C_2H_4	(C) 800 (0,0 —)	(A) 948 (30,4 —)	(B) 949 (0,0 m)
$\text{C}_2\text{H}_3\text{D}$	712 (2,6 w)	884 (10,0 w)	949 (11,4 w)
$\text{C}_2\text{H}_2\text{D}_2$ <i>trans</i>	(A+C) 627 (4,4 —)	(B+D) 869 (0,0 m)	(A+C) 896 (22,3 —)
<i>cis</i>	(B+C) 650 (0,0 w)	(A+D) 844 (27,0 w)	(B+C) 901 (0,0 w)
<i>asym</i>	(C+D) 695 (0,0 w)	(A+B) 754 (13,6 w)	(A+B) 948 (12,0 w)
C_2HD_3	608 (1,6 w)	752 (14,2 w)	879 (9,4 w)
C_2D_4	(C) 572 (0,0 —)	(A) 726 (23,4 —)	(B) 781 (0,0 m)

Entre parenthèses, fréquences et intensités relatives l. R. calculées;
m moyen et w faible en effet Raman.

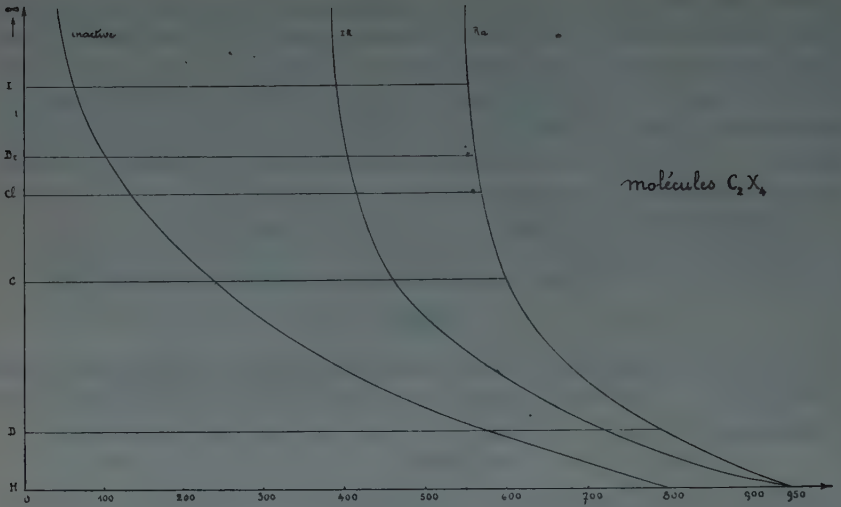


FIG. 1.

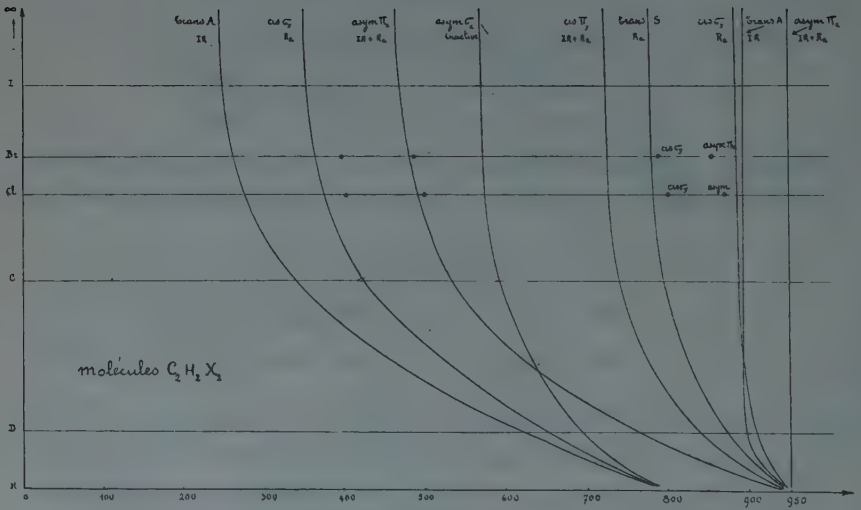


FIG. 2.

On voit que la loi bien connue de Lord Rayleigh est satisfaite : un accroissement de masse dans une partie quelconque d'un système ne peut en aucun cas être accompagné d'un accroissement des fréquences propres du système.

En vue de l'étude ultérieure de molécules du type C_2X_4 et $C_2H_2X_2$ ($X = CH_3, Cl, Br, I$), nous avons calculé les courbes des figures 1 et 2, en gardant les dimensions et les constantes potentielles caractérisant les deutéroéthylènes. Ces constantes, selon toute vraisemblance, vont en décroissant dans le sens CH_3 vers I , ce qui entraînera un abaissement des fréquences calculées. L'effet du changement des distances CX est négligeable dans le cas de C_2Cl_4 et C_2Br_4 pour lesquels nous avons calculé la fréquence B , la seule affectée, en adoptant pour les distances

$$CCl : 1,80 \times 10^{-8} \text{ et } CBr : 2,0 \times 10^{-8} \text{ cm,}$$

sans modifier l'angle $XCX = 126^\circ$.

Par contre, pour $C_2H_2X_2$, l'effet est plus important. Nous avons obtenu (en cm^{-1}) :

TABLEAU VI

	$CCl = 1,80$	$CCl = 1,06$	$CBr = 2,0$	$CBr = 1,06 \times 10^{-8} \text{ cm}$
(B) C_2X_4	563	569	557	560
(B+D) $C_2H_2X_2 \text{ trans}$	698	782	681	778
(B+C) $C_2H_2X_2 \text{ cis}$	807	894	791	894
	407	387	403	362
(A+B) $C_2H_2X_2 \text{ asym}$	875	947	860	947
	501	492	496	480
k^2	4,809	2,854	5,408	2,854

Enfin, à partir des équations de Lagrange, les modes fondamentaux ont pu être calculés, fig. 3 (Amplitudes en unités 10^{-9} cm). On n'oubliera pas qu'ils ont été calculés avec les valeurs « spectroscopiques » des masses. Avec les masses ordinaires, les secondes décimales des amplitudes seraient majorées de 1 à 10 unités. Ces résultats fournissent des indications intéressantes concernant l'intensité globale relative des bandes d'absorption infra-rouges. Nous les avons calculées et inscrites entre parenthèses dans le tableau V, en attribuant aux atomes de carbone une charge double et de signe contraire de celle des atomes d'hydrogène prise comme unité ; l'intensité a été prise proportionnelle au carré du moment électrique oscillant maximum ainsi calculé et proportionnelle à la quatrième puissance de la fréquence.

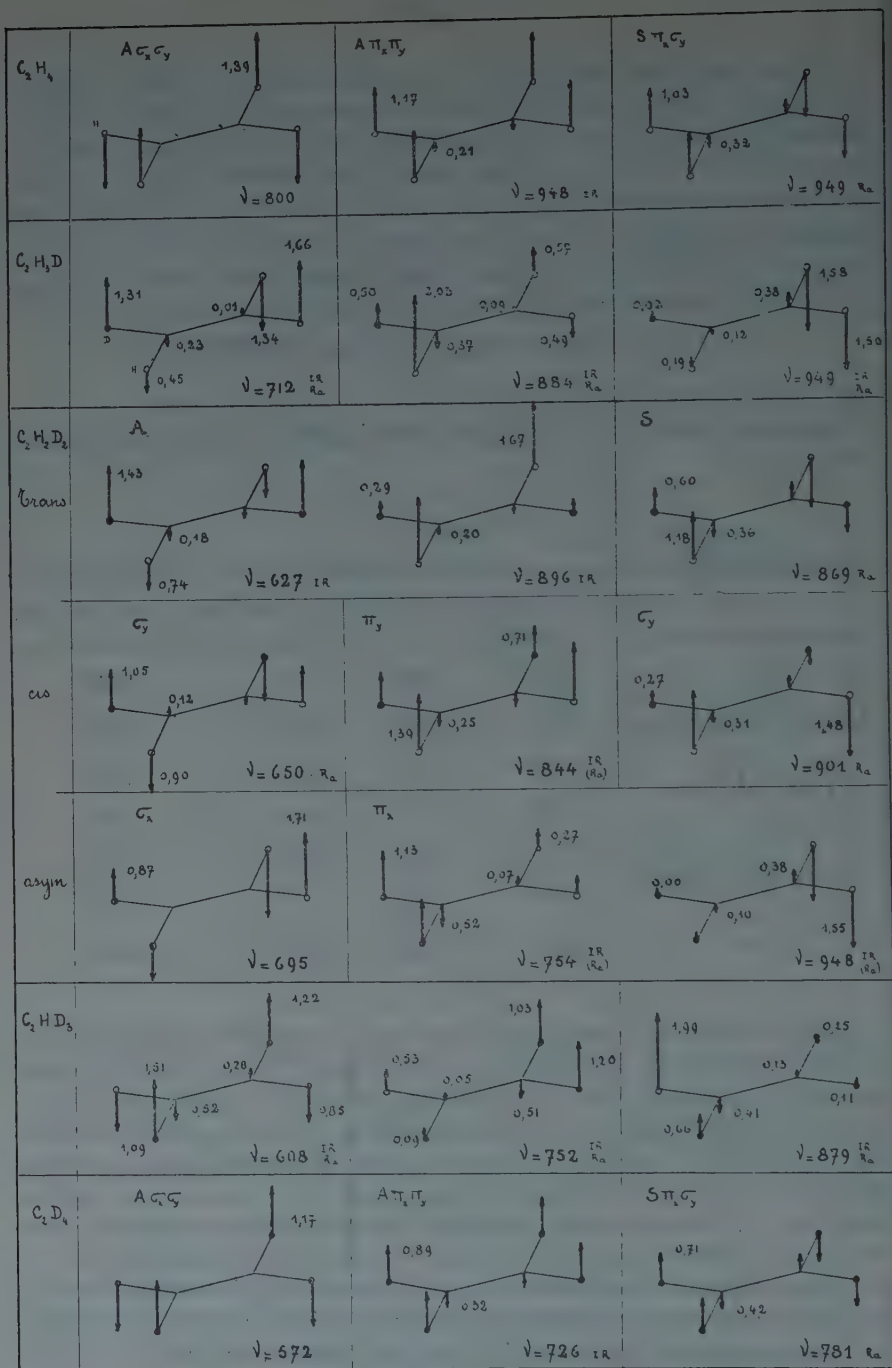


FIG. 3.

L'inspection des figures permet de tirer des conclusions qualitatives analogues pour l'intensité des raies Raman. Ces raies, on le sait, sont toujours faibles en valeur absolue. Celles qui paraissent être relativement les plus intenses ont été marquées *m* dans le tableau ; les autres, qu'il ne faut guère s'attendre à pouvoir observer, ont été marquées *w*. Si le mode est inactif en effet Raman, il n'y a aucune indication.

6. Discussion.

Les fréquences expérimentales Raman choisies comme données de départ pour le calcul, C_2H_4 949 et C_2D_4 780 cm^{-1} sont celles qui avaient été choisies dans les travaux antérieurs, en particulier par TCHANG, comme basses fréquences du mode plan S_2 chez C_2H_4 et C_2D_4 . Toutes les fréquences Raman mentionnées dans ce travail sont celles observées par DE HEMPTINNE et ses collaborateurs sur les corps à l'état liquide, dans les mêmes conditions physiques. Une meilleure valeur obtenue plus récemment est C_2H_4 943.

Les fréquences expérimentales infra-rouges C_2H_4 950 et C_2D_4 724 cm^{-1} (meilleure valeur, plus récente 722) sont celles données respectivement par BONNER et SUTHERLAND.

De plus, il y a les fréquences Raman $C_2H_2D_2$ *trans* ou *cis* 863 et 763 cm^{-1} renseignées par de Hemptinne, dont la première est en accord excellent avec la fréquence 869 calculée pour *trans* et prévue d'intensité moyenne en effet Raman. Quant à la seconde, elle paraît en bon accord avec la fréquence calculée (A + B) 754 pour *asym*, mais cette interprétation doit être rejetée, puisque de Hemptinne exclut la présence de *asym* en quantité appréciable dans le corps étudié. Cette fréquence ne peut donc provenir que d'un mode plan ; c'est d'ailleurs l'interprétation qu'en avait donnée Tchang.

Enfin, il y a encore la fréquence Raman relativement intense 996 attribuée par de Hemptinne à C_2H_3D et qui, comme la fréquence 863, n'avait pas été interprétée dans les travaux théoriques, ni en particulier par Tchang, comme fréquence d'un mode plan. Il semble bien certain, d'après ce qui précède, et en vertu du théorème de Lord Rayleigh, que 996 cm^{-1} ne peut appartenir qu'à un mode plan, puisqu'elle est plus élevée que n'importe laquelle des trois choisies pour les modes gauches de C_2H_4 . Il faudra donc, si les résultats précédents sont confirmés, retoucher le calcul de la fonction potentielle des mouvements plans ; c'est la conclusion qui se dégage également des résultats de SUTHERLAND. La correction sera d'ailleurs très faible, car elle ne proviendra que du léger changement de valeur (voir Sutherland) des basses fréquences des modes plans $S_2(Ra)$ et $A_2(I.R.)$. Or, ces fréquences sont très peu « couplées » avec les hautes fréquences des mêmes modes, voisines de 3000 cm^{-1} .

Le choix de la fréquence totalement inactive C_2H_4 800 a été fait d'après les données de EUCKEN, obtenues à partir des chaleurs spécifiques (STUART, *Molekülstruktur*, Berlin 1934, p. 338). SUTHERLAND vient de proposer, à la suite d'une étude des fréquences de combinaison du spectre infra-rouge de C_2H_4 et C_2D_4 , la valeur 700 cm^{-1} , BONNER avait adopté 825 , à cause de la fréquence harmonique active en Raman de valeur 1653 cm^{-1} . Une étude des spectres de vibration des divers substitués chlorés de l'éthylène nous fait préférer cette dernière attribution.

Si l'on voulait absolument interpréter C_2H_3D 996 comme fréquence gauche, on serait obligé d'élever la valeur de C_2H_4 de 800 à 1178 cm^{-1} , ce qui paraît excessif.

En conclusion, nous voudrions insister sur l'intérêt qui s'attache à l'étude expérimentale des spectres d'absorption des deutéroéthylènes, spécialement de $C_2H_2D_2$ *trans* et des molécules dissymétriques C_2H_3D et C_3HD_3 . Comme l'indique le tableau V, on peut s'attendre à trouver des bandes d'absorption assez intenses, dont la position est directement liée à la valeur de la fréquence totalement inactive chez C_2H_4 .

RÉFÉRENCES

- BONNER, *Jour. Amer. Chem. Soc.* **58**, 34 (1936). I. R. et Ra C_2H_4 expér.
DE HEMPTINNE, JUNGERS, DELFOSSE, *Nature*, **140**, 323 (1937); *Jour. Chem. Phys.* **6**, 319 (1938). Expér. deutéroéthylènes.
1. DELFOSSE, *Ann. Soc. scient. Brux.*, B, **55**, 114 (1935). Vibrations C_2H_4 .
 2. MANNEBACK, VERLEYSSEN, *Nature*, **136**, 367 (1936). *Ann. Soc. scient. Brux.*, B, **56**, 349 (1936); I, **57**, 31 (1937). Vibrations C_2H_4 , $C_2H_2D_2$, C_2D_4 .
 3. LEMAITRE, MANNEBACK, TCHANG, *Nature*, **139**, 1111 (1937); *Ann. Soc. scient. Brux.*, I, **57**, 120 (1937). Vibrations C_2H_3D .
- MANNEBACK, *Jour. Chem. Phys.*, **5**, 989, A. (1937).
4. TCHANG, *Ann. Soc. scient. Brux.*, I, **58**, 87 (1938). Fonction potentielle deutéroéthylène.
 5. DE HEMPTINNE, MANNEBACK, *Proc. Indian Acad. Sciences*. Sous presse. Synthèse vibrations deutéroéthylènes.
- PENNEY, *Proc. Roy. Soc.*, A, **158**, 306 (1937). Dimensions molécule C_2H_4 .
SUTHERLAND, CONNE, *Nature*, **140**, 644 (1937). *Proc. Roy. Soc.* Sous presse.
PLACZEK, *Handb. Radiologie*, VI, 2^e edit. Rayleigh Streuung u. Raman Effekt.
CABANNES, *Annales de Physique*, **18**, 285 (1932). Symétrie des molécules et Spectres de diffusion.

Errata de la publication

Calcul de la fonction potentielle et des fréquences fondamentales
des molécules $C_2H_xD_y(x + y = 4)$ par YONG-LI TCHANG
[Ann. Soc. scient. B. T. LVIII, série I, p. 87, 1938]

p. 89	TABLEAU I		première ligne	
lire	S_1	A_1	A_2	S_2
au lieu de	S_1	A_2	A_2	S_2

p. 92 TABLEAU IV deuxième ligne de valeurs numériques

	<i>Calculée</i>	<i>Observée</i>	<i>Cal.-Obs.</i>	<i>Erreurs en pour cent</i>
au lieu de	3029	3016	13	0 4
lire	3039	3016	23	0,8

CORRESPONDANCE

REMARQUES SUR LA TAILLE DES LAMES DE QUARTZ

par M. Roger SERVANT

Dans une communication (1) parue en mars 1938 aux *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, M. Biot a examiné le problème de la taille des lames de quartz. Après avoir rappelé mon travail antérieur (2), il a décrit une méthode légèrement différente, mais partant des mêmes remarques initiales sur le « décentrage » des anneaux donnés en lumière convergente entre nicols croisés par les lames à rectifier.

Je tiens à rectifier une erreur qui s'est glissée dans son texte au sujet du résultat de mes calculs et qui tend à en réduire l'intérêt. Contrairement à ce qui est dit, mes calculs n'aboutissent pas tout à fait à la proposition que « les anneaux que l'on observe sont centrés sur un point correspondant à l'axe optique du quartz » (résultat auquel on est conduit par intuition), ils montrent justement que cette manière de voir n'est qu'approximative : le centre d'un anneau n'est pas sur le rayon d'inclinaison ξ qui se réfracterait suivant l'axe optique, mais sur le rayon d'inclinaison $\xi' = \xi / \cos i$ (où i est la $1/2$ ouverture de l'anneau). Dans le cas d'une lame mince, dégrossie à 7 ou 8 minutes, on peut être amené à pointer des anneaux pour lesquels l'écart entre ξ et ξ' peut atteindre la minute.

Donc, le point de départ de M. Biot tout en étant sensiblement le même que le mien est un peu moins rigoureux.

(1) A. BIOT, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 58, 1938, série I, p. 98.

(2) R. SERVANT, *C. R.*, t. 204, 1937, p. 856; et *Revue d'Optique théorique et instrumentale*, 16, 1937, p. 215.

POST-SCRIPTUM. — Cette note avait simplement pour but de donner l'énoncé complet des résultats de mes calculs. Il reste bien entendu que dans certains cas, on peut se contenter d'approximations. Dans la note ci-après, que l'on a bien voulu me communiquer, M. Biot indique les raisons qui ont motivé les siennes. Ses arguments ne sauraient s'appliquer à ma méthode, qui tient compte précisément du résultat complet des calculs et ne comporte pas de tâtonnements successifs.

RÉPONSE DE M. A. BIOT

1. Si je reprends ma note, je lis :

« il (M. Servant) établit d'abord mathématiquement la propriété suivante *suffisamment approchée* tant que l'erreur de taille est faible : », (*suit la proposition incriminée*).

(Je souligne les mots importants pour la controverse.)

2. Je reconnais volontiers que M. Servant a calculé la valeur de l'écart qui existe en fait entre le centre d'un anneau et l'axe optique quand la perpendicularité n'est pas établie. Il résulte toutefois de son calcul que cet écart est toujours faible par rapport à l'erreur de taille.

Remarquons maintenant que l'on ne peut en général espérer amener une lame à la perpendicularité à la suite d'une seule retouche de ses faces. Les tâtonnements nécessaires ne peuvent manifestement être affectés par l'existence du petit écart calculé par M. Servant. D'où l'énoncé rappelé plus haut, qui n'a d'autre prétention que de servir de ligne de conduite à une règle pratique de travail qui conduit d'ailleurs en fait au résultat cherché, ainsi que l'ont montré de nombreuses « mises à l'axe » de cristaux de quartz.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 50,00

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES.

t. I à XXV (1875 à 1901) fr. 10,00
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926). fr. 20,00

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 35,00

Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. 35,00

Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 50,00 — (1929 à 1933) fr. 20,00
(1934 à 1936) fr. 10,00

Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 10,00 — (1930) fr. 30,00
(1931 à 1936) fr. 50,00

Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII et LVIII (1937 fr. 35,00
et 1938)

Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII et LVIII (1937 et 1938) fr. 35,00

Série III (sc. économiques), tt. LVII et LVIII (1937 et 1938) fr. 50,00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . fr. 60,00

Le fascicule trimestriel fr. 17,00

t. XCIII à CXIV (1928 à 1938) Les deux volumes annuels . . . fr. 80,00

Le fascicule fr. 14,00

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE,

t. I à L (1877 à 1901) fr. 10,00

t. LI à LXXX (1902 à 1921) fr. 10,00

t. LXXXI à CX (1922 à 1936) fr. 15,00

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — **B. Tougareinoff**. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. 12,00 ; en France, fr. fr. 12,00 ; autres pays, belgas 4,00.

II. — **V. Schaffers**. Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. 12,00 ; en France, fr. fr. 12,00 ; autres pays, belgas 4,00.

MONOGRAPHIES MÉDICALES

I. — **M. Schillings**. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. 35,00 ; en France, fr. fr. 35,00 ; autres pays, belgas 11,00.

II. — **A. Lemaire**. Le problème de la sensibilité viscérale et l'anesthésie des splanchnalgies. Un vol. in-8° de 86 pages (1928) : en Belgique, fr. 18,00 ; en France, fr. fr. 18,00 ; autres pays, belgas 6,00.

III. — **P. Van Gehuchten**. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. 12,00 ; en France, fr. fr. 12,00 ; autres pays, belgas 4,00.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

I. — **A. Henry**. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . fr. 10,00

II. — **A. Henry**. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages fr. 5,00

III. — **A. Delpérée**. La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages fr. 30,00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la première série comprend 30 volumes (1877-1891); la deuxième, 20 volumes (1892-1901); la troisième, 30 volumes (1902-1921); la quatrième série, 30 volumes (1922-1936). Le fascicule de janvier 1937 ouvre la cinquième série.

La revue paraît six fois par an depuis 1928. Chaque livraison renferme trois parties principales :

La première partie se compose d'Articles originaux, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La deuxième partie consiste en une Revue des Revues et des Publications périodiques.

La troisième partie consiste en une Bibliographie scientifique, analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de Variétés.

CONDITIONS D'ABONNEMENT

L'abonnement est payable annuellement avant la fin de février. Il court jusqu'à ordre contraire.

Belgique et Grand-Duché de Luxembourg	80 francs belges
France	80 francs français
Autres pays	26 belgas

Pour tout ce qui concerne la Rédaction, s'adresser au Secrétariat de la Revue, Collège philosophique, Eegenhoven (Louvain).

Pour ce qui concerne l'Administration, s'adresser au Secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain. Compte chèques postaux n° 202746.

Compte chèques postaux Paris, n° 110002, Société scientifique.

Louvain. — Établiss. FR. CEUTERICK, rue Vital Decoster, 66.